2 RECOUVREMENTS VARIETES

RECOUVREMENT de l'Ensemble E = Ensemble (d'ensembles) $\mathcal{R}$ tel que $E \subset \bigcup \mathcal{R}$
PIECE = Elément d'un recouvrement.
Recouvrement FINI = Recouvrement dont le nombre de pièces est fini.
Recouvrement OUVERT = Recouvrement dont les pièces sont ouvertes
Recouvrement FERME = Recouvrement dont les pièces sont fermées.
VARIÉTÉ de DIMENSION n = HAUSDORFF qui admet un recouvrement ouvert dont les pièces sont homéo $\mathbf{R}^n$

▲ $\mathcal{R}$ recouvre E <u>ssi</u> $\mathcal{R}$ est un recouvrement de E

La partie $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}_E$ recouvre E

<u>ssi</u>

$$E = \bigcup \mathcal{R}$$ ■

La définition des recouvrements ouverts suppose implicitement que l'on sache par le contexte à quelle topologie les pièces du recouvrement appartiennent.

Même remarque pour les recouvrements fermés.

Codicille à la définition des recouvrements ouverts :

▲ Recouvrement ouvert de $E, \mathcal{T}$ = Partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{T}$ telle que $E = \bigcup \mathcal{P}$.

▲

$\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n

$\mathbb{R}$ est une variété de dimension 1.

Tout espace homéomorphe à une variété de dimension n est une variété de dimension n.

Les arcs ouverts sont des variétés de dimension 1.

■

Tout demi-cercle ouvert d'un cercle

Tout demi-cercle fermé d'un cercle

est un ouvert du cercle et un arc ouvert

est un fermé du cercle et un arc fermé.

Tout cycle admet un recouvrement fermé, ensemble de deux arcs fermés dont l'intersection est une paire.

■

ÉPOINTÉ d'un CERCLE

Tout épointé d'un cercle est un ouvert du cercle
Tout épointé d'un Hausdorff est un ouvert de cet Hausdorff
Tout épointé d'un cycle est un ouvert du cycle et un arc ouvert

■

Deux épointés distincts d'un cycle forment un recouvrement ouvert donc chaque pièce est un arc ouvert

: Tout cycle est une Variété de dimension 1.

■

□ Dans la définition des variétés le mot HAUSDORFF est essentiel

✱ Nous allons construire un espace topologique NON HAUSDORFF qui admet un recouvrement ouvert de deux pièces homéo $\mathbb{R}$

1. Démarche intuitive.

Voici $\mathbb{R}$

Ablation de 0

Écartement des deux morceaux

Rentrée de 0 au nid, en même temps qu'un coucou 0' qui calque sa conduite sur celle du fils légitime 0

On a créé de la sorte une "soufflette" "ponctuelle"

2. Traduction mathématique

$\mathcal{T}_{us}$ = topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et $0' \notin \mathbb{R}$

$\mathcal{T}_{0'} = \{ (T \cup \{0'\}) \setminus \{0\} \mid 0 \in T \in \mathcal{T}_{us} \}$

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{us} \cup \mathcal{T}_{0'}$ est une topologie sur $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \cup \{0'\}$

$\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R} \cup \{0'\}) \setminus \{0\}$ sont des sous-espaces de $\mathbb{R}'$ homéomorphes à $\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}$.

Les points 0 et $0'$ ne peuvent être séparés à la Hausdorff par des ouverts de $\mathcal{T}$. ■

■

L'ensemble des singletons d'un Hausdorff, $E, \mathcal{T}$ est un recouvrement fermé

L'ensemble des sous-espaces singletons de $E, \mathcal{T}$ ne fournit nulle information concernant $\mathcal{T}$, dès que $\# E > 1$.

L'utilité des recouvrements ouverts apparaît dans le théorème que voici

Si $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de l'espace $E, \mathcal{T}$

Alors $\bigcup_{P \in \mathcal{R}} \mathcal{T}_P$ est une base de $\mathcal{T}$

Les sous-espaces définis par les pièces d'un recouvrement ouvert d'un espace topologique permettent d'étudier celui-ci à la manière du géographe qui décrit le globe terrestre au moyen de cartes locales. L'efficacité du procédé croît avec la simplicité des pièces. L'existence de recouvrements ouverts dont toutes les pièces sont homéo $\mathbb{R}^n$ rend les variétés bien sympathiques.

* La proposition ci-dessus découle d'un théorème plus général que nous établirons d'emblée.

mini

Si $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de l'espace E, τ

$\forall P \in \mathcal{R}$: $\mathcal{B}_P$ est une base de τ_P

Alors $\bigcup_{P \in \mathcal{R}} \mathcal{B}_P$ est une base de τ.

*

- ▲ $t \in E$
- ▲ $t \in T \in \tau$
- ▲ $t \in P \in \mathcal{R} \subset \tau$
- $P \cap T \in \tau$
- $t \in P \cap T \in \tau_P$
- ▲ $t \in B \in \mathcal{B}_P \wedge B \subset P \cap T$

Pour tout point t de tout ouvert T de $\mathcal{T}$, il existe une pièce P du recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ et un élément $B \in \mathcal{B}_P$ tels que

$$t \in B \subset T$$

$\bigcup_{P \in \mathcal{R}} \mathcal{B}_P$ est une base de $\mathcal{T}$

■

□ Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des recouvrements ouverts des espaces $E, \mathcal{T}$ et $F, \mathcal{U}$

La bijection $f : E \to F$ définit une bijection $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ et pour tout $P \in \mathcal{R}$ un homéo $f : P, \mathcal{T}_P \to fP, \mathcal{U}_{fP}$

Alors f est un homéo $E, \mathcal{T} \to F, \mathcal{U}$

■

E-xercices

1. Dans le terme $(T \cup \{o'\}) \setminus \{o\}$ rencontré page 9, il vaut mieux mettre les parenthèses puisque

$$o \notin (T \cup \{o'\}) \setminus \{o\} \neq T \cup (\{o'\} \setminus \{o\}) \ni o$$

Il est vrai qu'en vertu d'une convention implicitement admise par presque tous les mathématiciens, on met souvent

$$T \cup \{o'\} \setminus \{o\} \quad \text{pour} \quad (T \cup \{o'\}) \setminus \{o\}$$

de même que

$$5 - 2 - 3 \quad \text{est mis pour} \quad (5 - 2) - 3$$

2.

1 PARTAGE = Ensemble d'ensembles
non vides disjoints deux à deux .

2 ENSEMBLE D'UN PARTAGE = Réunion du partage

3 □ Tout partage recouvre son ensemble ■

4 TOPOLOGIE = Ensemble d'ensembles
stable par intersection binaire
et réunion générale

5 ENSEMBLE D'UNE TOPOLOGIE = Réunion de la topologie

6 □ Toute topologie recouvre de son ensemble ■

7 □ L'ensemble des singletons de $\mathbf{R}$

L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$

L'ensemble des parties convexes de $\mathbf{R}$

L'ensemble des demi-droites fermées de $\mathbf{R}$

sont des recouvrements (non dénombrables) de $\mathbf{R}$ ■

x 8 □ $\{\mathbf{Q}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$

$\{\{z\} \mid z \in \mathbf{Z}\} \cup \{]z, z+1[\mid z \in \mathbf{Z}\}$

$\{]z, z+2[\mid z \in \mathbf{Z}\}$

$\{[z, z+1] \mid z \in \mathbf{Z}\}$

$\{]q-10^{-n}, q+10^{-n}[\mid q \in \mathbf{Q}\}$ (où $n \in \omega$)

$\{]q-10^{-n}, q+10^{-n}[\mid q \in \mathbf{Q}, n \in \omega\}$

sont des recouvrements (dénombrables) de $\mathbf{R}$ ■

EX 9 □ VARIÉTÉ DE DIMENSION n

= *Hausdorff* qui admet un recouvrement ouvert dont les pièces sont homéo à $\mathbf{R}^n$

= *Hausdorff* qui admet un recouvrement ouvert dont les pièces sont homéo à des ouverts de $\mathbf{R}^n$

= *Hausdorff* dont tout point a un voisinage homéo à $\mathbf{R}^n$

= *Hausdorff* dont tout point a un voisinage homéo à un ouvert de $\mathbf{R}^n$

EX 10 □ Tout ouvert (non vide) de $\mathbf{R}^n$ est réunion d'ouverts homéo à $\mathbf{R}^n$

EX 11 □ Toute boule ouverte (non vide) de $\mathbf{R}^n$ (muni de la norme euclidienne $\| \ \|$) est homéo à $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$

□ La boule ouverte $B(0,1)$ de centre l'origine o de rayon 1 est homéo à $\mathbf{R}^n, \mathcal{T}_{us}$

▶ $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow B(0,1) \ : \ x \longmapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$

$g : B(0,1) \longrightarrow \mathbf{R}^n \ : \ x \longmapsto \dfrac{x}{1 - \|x\|}$

sont bijections continues réciproques,

sont homéos ■

EX 12 On appelle parfois VARIÉTÉ TOPOLOGIQUE ce que nous appelons ici VARIÉTÉ

Ex 22

X 13 □ Tout intervalle réel ouvert (non vide)
Toute demi-droite réelle ouverte

sont variétés de dimension 1 ■

X 14 □ Tout ouvert non vide d'une variété de dimension n est variété de dimension n ■

(□ Espace topologique fini ou dénombrable n'est pas variété ☒

(15 □ $\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{us}$ n'est pas variété □

($\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_{us}$ n'est pas variété ■

(16 □ En $\Pi, \mathcal{T}_{us}$: tout cercle est variété de dimension 1 ■

(17 □ En $\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T}_{us}$:

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \right\} \text{ est}$$

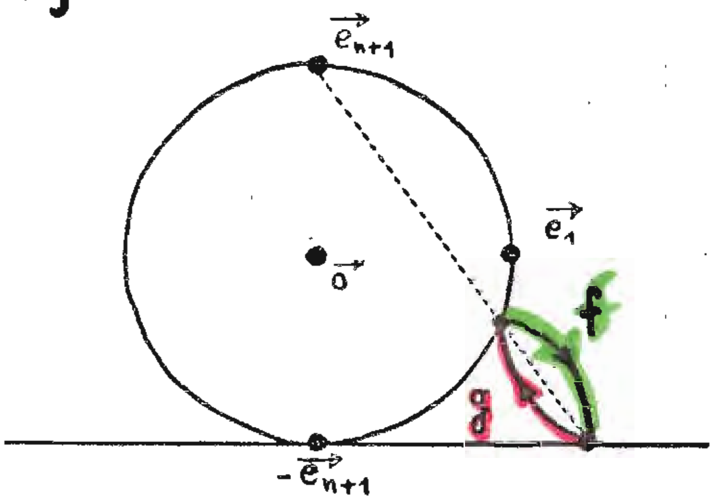
variété de dimension n

□ En $\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T}_{us}$

$S^n \setminus \left\{ (0, 0, \dots, 0, 1) \right\}$ est homéo à $\mathbb{R}^n$

▶ $\left\{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1} \right\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$

▶ S^n



▶ H

$$H = -\vec{e}_{n+1} + \text{vct}\left\{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \right\}$$

✻ ▶ $f : S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\} \longrightarrow H$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{e}_{n+1} + \frac{2}{1 - x_{n+1}} \left(\vec{x} - \vec{e}_{n+1} \right)$$

(où $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n + x_{n+1} \vec{e}_{n+1}$; $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$)

f est continue

▶ $g : H \longrightarrow S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\}$

$x \longmapsto \vec{e}_{n+1} + \dfrac{4}{3 + \|\vec{x}\|^2} (\vec{x} - \vec{e}_{n+1})$

g est continue

✻ $f \circ g = 1_H$

$g \circ f = 1_{(S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\})}$

$\vdash$ f et g sont bijections continues réciproques,

sont homéos ■

EX 18 □ Toute sphère épointée de $\mathbf{R}^{n+1}$

est homéo à

toute boule ouverte (non vide) de $\mathbf{R}^n$

▶ $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}\}$ une base normée de $\mathbf{R}^{n+1}$

▶ $S^n = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\vec{x}\| = 1\}$

▶ $B^n = \{\vec{x} \in \mathrm{vct}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \mid \|\vec{x}\| < 1\}$

✻ ▶ f $B^n \longrightarrow S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\}$

$x \longmapsto 2\sqrt{1 - \|\vec{x}\|^2}\, \vec{x} + (2\|\vec{x}\|^2 - 1)\, \vec{e}_{n+1}$

f est continue

▶ g $S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\} \longrightarrow B^n$

$\vec{x} \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(1 - x_{n+1})}}\, \vec{px}$

(où $\vec{x} = \vec{px} + x_{n+1}\, \vec{e}_{n+1}$)

g est continue

✻ $f \circ g = 1(S^n \setminus \{\vec{e}_{n+1}\})$

$g \circ f = 1B^n$

$\vdash$ f et g sont bijections continues réciproques

sont homéos ■

EX 19 ▶ $S^1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$

▶ $S^1, \mathcal{T}_{us}$

□ $S^1 \times S^1$ muni de la topologie produit est

variété de dimension 2 et est appelé

TORE ... à 2 dimensions ...

✻ $\mathbf{R}, \mathcal{T}_{us} \times \mathbf{R}, \mathcal{T}_{us}$ homéo $\mathbf{R}^2, \mathcal{T}_{us}$

Le produit de deux Hausdorff est Hausdorff ■

EX 20 □ Le produit cartésien de 2 variétés de dimension n et m,

muni de la topologie produit, est variété de dimension $n+m$ ■

EX 21 ▶ $S^2 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$

□ Dans $S^2, \mathcal{T}_{us}$,

tout ouvert différent de S^2 est homéo à

un ouvert de $\mathbf{R}^2$

✻ La sphère S^2 épointée est homéo à $\mathbf{R}^2$ ■

EX 22 □ La sphère S^2 possède un recouvrement ouvert dont les

pièces ne comprennent chacune aucune paire de points

antipodaux ■

EX 23 ▶ $S^2 = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$

▶ Relation d'équivalence $\sim$ sur S^2 :

$$\vec{x} \sim \vec{y} \quad \text{ssi} \quad \vec{x} = -\vec{y}$$

▶ Projection canonique

$$p : S^2 \longrightarrow S^2/\sim \ : \ \vec{x} \longmapsto \{\vec{x}, -\vec{x}\}$$

On munit $S^2/\sim$ de la TOPOLOGIE QUOTIENT définie par

A est un ouvert de $S^2/\sim$ ssi pA est un ouvert de S^2

□ p est une APPLICATION OUVERTE

c.à.d. l'image par p d'un ouvert de S^2 est un ouvert de $S^2/\sim$ ■

□ La restriction de p à tout ouvert de S^2, ne comprenant aucune paire de points antipodaux est un homéo de cet ouvert sur son image.

✱ La restriction de p à un tel ouvert est une bijection de l'ouvert sur son image
Cette bijection est continue et ouverte
Cette bijection est homéo ■

$S^2/\sim$ muni de cette topologie quotient est appelé

PLAN PROJECTIF (RÉEL) et noté P^2

EX 24 □ Le plan projectif (réel) est

variété de dimension 2

▶ $p : S^2 \longrightarrow P^2 \ , \ \vec{x} \longmapsto \{\vec{x}, -\vec{x}\}$

▶ recouvrement ouvert de S^2 dont les pièces ne comprennent chacune aucune paire de points antipodaux.

⊢ chacun des ouverts de ce recouvrement est homéo à un ouvert de $\mathbf{R}^2$

P^2 est Hausdorff ■