3 ORDONNÉS

Dans l'Ordonné $E, \leq$	$\forall a \in E \quad \forall P \subset E$
a MAJORE P $\Leftrightarrow$ a est un MAJORANT de P $\Leftrightarrow$ a $\geq$ tout élément de P maj P = ensemble des majorants de P	a MINORE P $\Leftrightarrow$ a est un MINORANT de P $\Leftrightarrow$ a $\leq$ tout élément de P min P = ensemble des minorants de P
a majore STRICTEMENT P $\Leftrightarrow$ a est un majorant STRICT de P $\Leftrightarrow$ $a \in \text{maj } P \setminus P$ $\Leftrightarrow$ a > tout élément de P	a minore STRICTEMENT P $\Leftrightarrow$ a est un minorant STRICT de P $\Leftrightarrow$ $a \in \text{min } P \setminus P$ $\Leftrightarrow$ a < tout élément de P
a est MAXIMUM de P $\Leftrightarrow$ $a \in P \cap \text{maj } P$	a est MINIMUM de P $\Leftrightarrow$ $a \in P \cap \text{min } P$
a est BORNE SUPERIEURE de P $\Leftrightarrow$ a est SUPREMUM de P $\Leftrightarrow$ a est minimum de maj P	a est BORNE INFERIEURE de P $\Leftrightarrow$ a est INFIMUM de P $\Leftrightarrow$ a est maximum de min E

Pour toute partie P de l'Ordonné $E, \leqslant$

$$\#(P \cap \text{maj } P) \leqslant 1 \quad \wedge \quad \#(P \cap \text{mij } P) \leqslant 1$$

Toute partie d'un ordonné admet

au plus un maximum — au plus un minimum

au plus un suprémum — au plus un infimum

LE maximum éventuel d'une partie P est noté max P

LE minimum éventuel d'une partie P est noté min P

LE suprémum éventuel d'une partie P est noté sup P

L' infimum éventuel d'une partie P est noté inf P

$$P \cap \text{maj } P \neq \emptyset \iff P \cap \text{maj } P = \{\max P\}$$

$$P \cap \text{mij } P \neq \emptyset \iff P \cap \text{mij } P = \{\min P\}$$

$$\text{maj } P \cap \text{mij maj } P \neq \emptyset \iff \text{maj } P \cap \text{mij maj } P = \{\sup P\}$$

$$\text{mij } P \cap \text{maj mij } P \neq \emptyset \iff \text{mij } P \cap \text{maj mij } P = \{\inf P\}$$

$$\text{mij maj } P \supset P \quad \wedge \quad \text{maj mij } P \supset P$$

$$P \cap \text{maj } P \neq \emptyset \Rightarrow \text{mij maj } P \cap \text{maj } P \neq \emptyset$$

$$P \cap \text{mij } P \neq \emptyset \Rightarrow \text{maj mij } P \cap \text{mij } P \neq \emptyset$$

Pour toute fonction f de l'Ordonné $E, \leqslant$ dans l'Ordonné $F, \leqslant$

f CROISSANTE $\iff \forall x, y \in E : x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

f DECROISSANTE $\iff \forall x, y \in E : x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$

f STRICTEMENT croissante $\iff \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

f STRICTEMENT décroissante $\iff \forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

MONOTONE = CROISSANTE ou DECROISSANTE

☐ CROISSANTE STRICTE = CROISSANTE INJECTIVE

DECROISSANTE STRICTE = DECROISSANTE INJECTIVE.

ISOMORPHISME D'ORDONNÉS $E, \leqslant \longleftrightarrow F, \leqslant$

=

BIJECTION $f : E \rightarrow F$ telle que f et f^{-1} soient CROISSANTES.

☐ Pour les Ordonnés TOTAUX

ISOMORPHISME = BIJECTION CROISSANTE

L'hypothèse de TOTALITÉ est essentielle dans cet énoncé.

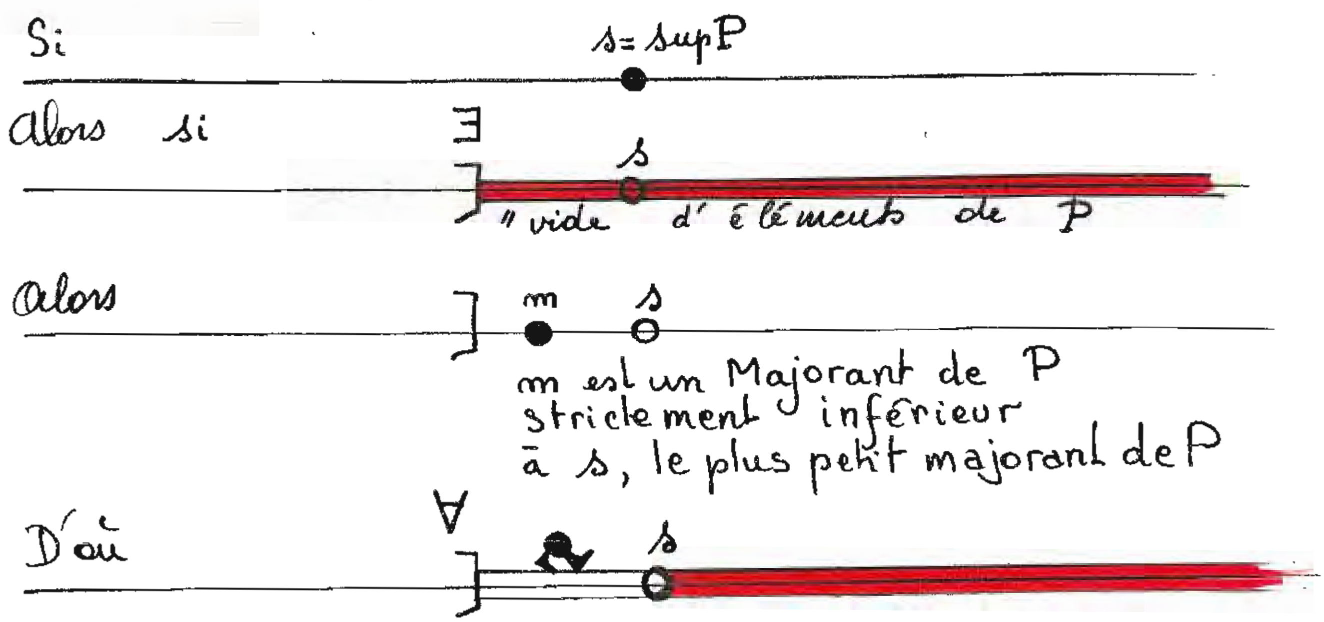
Pour toute partie P de l'ordonné $E, \leqslant$

- P MAJORÉE $\Leftrightarrow$ P admet un majorant $\Leftrightarrow$ $\text{maj}\, P \neq \emptyset$
- P MINORÉE $\Leftrightarrow$ P admet un minorant $\Leftrightarrow$ $\text{mij}\, P \neq \emptyset$
- P MAXIMÉE $\Leftrightarrow$ P admet un maximum $\Leftrightarrow$ $P \cap \text{maj}\, P \neq \emptyset$
- P MINIMÉE $\Leftrightarrow$ P admet un minimum $\Leftrightarrow$ $P \cap \text{mij}\, P \neq \emptyset$
- P BORNÉE $\Leftrightarrow$ P majorée $\wedge$ P minorée
- P SUPRÉMÉE $\Leftrightarrow$ P admet un suprémum $\Leftrightarrow$ $\text{maj}\, P \cap \text{mij}\,\text{maj}\, P \neq \emptyset$
- P INFIMÉE $\Leftrightarrow$ P admet un infimum $\Leftrightarrow$ $\text{mij}\, P \cap \text{maj}\,\text{mij}\, P \neq \emptyset$

Pour toute partie P de l'ordonné $E, \leqslant$

- P maximée $\Rightarrow$ (P suprémée $\wedge$ $\max P = \sup P$)
- P minimée $\Rightarrow$ (P infimée $\wedge$ $\min P = \inf P$)
- P maximée $\Rightarrow$ P suprémée $\Rightarrow$ P majorée
- P minimée $\Rightarrow$ P infimée $\Rightarrow$ P minorée

Dans $\mathbb{R}, \leqslant$; $\overline{\mathbb{R}}, \leqslant$; $\mathbb{R}^+, \leqslant$



dans $\mathbb{R}, \leqslant, \tau_{us}$ — dans $\overline{\mathbb{R}}, \leqslant, \tau_{us}$ — dans $\mathbb{R}^+, \leqslant, \tau_{us}$

Pour toute partie suprémée non vide P : $\sup P \in \mathrm{adh}\, P$
Pour toute partie infimée non vide P : $\inf P \in \mathrm{adh}\, P$
Tout fermé suprémé non vide est maximé
Tout fermé infimé non vide est minimé

Pour tout couple de réels distincts a, b

$$[a, b], \leqslant \quad \text{iso} \quad \overline{\mathbb{R}}, \leqslant \qquad \blacksquare$$

Les ordonnés $\mathbb{R}, \leqslant$ et $\mathbb{R}, \geqslant$ sont isomorphes
les ordonnés $\overline{\mathbb{R}}, \leqslant$ et $\overline{\mathbb{R}}, \geqslant$ sont isomorphes
Les ordonnés $\mathbb{R}^+, \leqslant$ et $\mathbb{R}^+, \geqslant$ ne sont pas isomorphes

Pour toute partie non vide de $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^+$

SUPREMUM = MAJORANT QUI ADHÈRE
INFIMUM = MINORANT QUI ADHÈRE

Pour toute partie fermée non vide de $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^+$

SUPREMÉE = MAXIMÉE
INFIMÉE = MINIMÉE
SUPRÉMUM = MAXIMUM
INFIMUM = MINIMUM.

■

Si A, B sont des parties de l'ordonné $E, \leqslant$

Alors $A \subset B \Rightarrow \text{maj } A \supset \text{maj } B$

■

Si A, B sont des parties suprémées de l'ordonné $E, \leqslant$

Alors $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$

■

Si A et B sont des parties de l'ordonné $E, \leqslant$ tellesque

$A \subset B \quad \wedge \quad \forall b \in B \quad A \cap \text{maj}\{b\} \neq \emptyset$

Alors $\text{maj } A = \text{maj } B$

■

Dans l'ordonné $E, \leqslant$

La proposition $\forall b \in B \quad A \cap \text{maj}\{b\} \neq \emptyset$

se traduit

Tout élément de B est majoré par un élément de A.

Si A, B sont des parties de l'ordonné $E, \leqslant$

telles que $A \subset B$

B suprémée

tout élément de B est majoré par un élément de A

Alors A est suprémée et $\sup A = \sup B$

Si A est une partie suprémée de l'ordonné $E, \leqslant$ et $a \in A$

Alors $\sup A = \sup \{ x \in A \mid x \geqslant a \}$

Pour tout élément x de l'ordonné $E, \leqslant$

x MAXIMAL $\iff$ $\operatorname{maj} \{x\} = \{x\}$

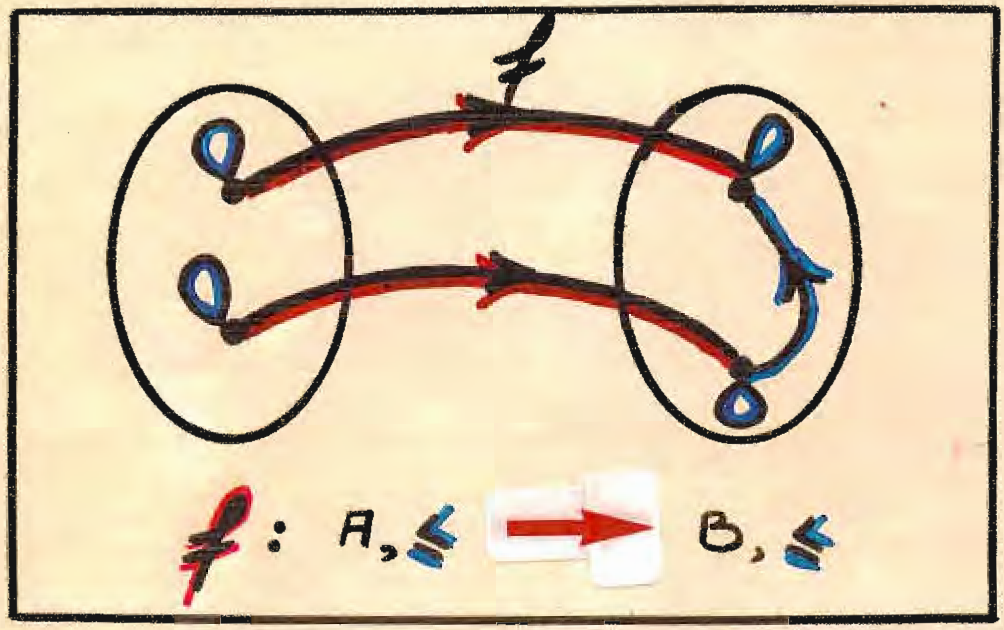
x MINIMAL $\iff$ $\operatorname{minj} \{x\} = \{x\}$

Le maximum de tout maximé est son seul maximal

Le minimum de tout minimé est son seul minimal ■

Exercices

1. Cette bijection croissante d'ordonnés



n'est PAS un isomorphisme

2. $\min(\omega, |) = 1$ $\max(\omega, |) = 0$

3. Dans $(\omega \setminus \{1\}, |)$: minimal = premier

4. <u>Si</u> $q(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs primaires de $n \in \omega \setminus \{0,1\}$

<u>Alors</u> les minimaux de $q(n), |$ sont les facteurs premiers de n

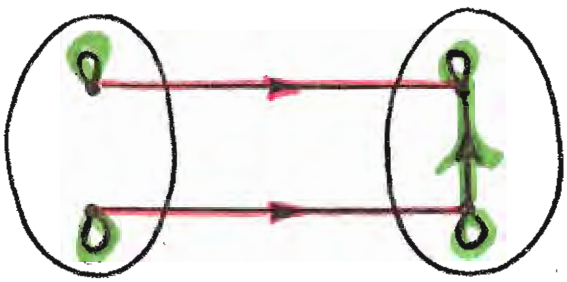
les maximaux de $q(n), |$ sont les plus hauts diviseurs primaires de n.

Montre que les implications du $4^{ème}$ encadré p. 16 ne peuvent pas être retournées.

Le maximum de tout maximé est son seul maximal

Le minimum de tout minimé est son seul minimal

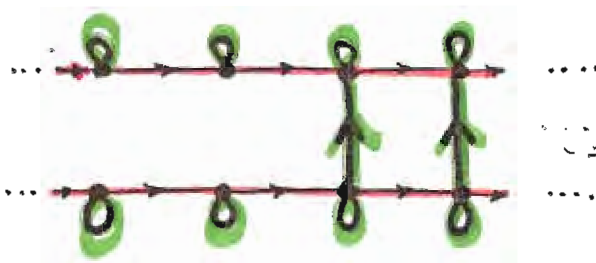
Voici une bijection croissante entre ordonnés qui n'est pas un isomorphisme



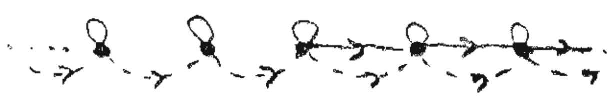
$E, \leqslant$ $\qquad$ $F, \leqslant$

Voici une permutation croissante (en rouge) d'un ordonné qui n'est pas un auto

$E, \leqslant$



autre exemple



Pour tout couple de réels distincts a, b :

$$[a,b], \leqslant \quad \text{iso} \quad \overline{\mathbb{R}}, \leqslant$$

Les ordonnés $\overline{\mathbb{R}}, \leqslant$ et $\overline{\mathbb{R}}, \geqslant$ sont isomorphes

Les ordonnés $\mathbb{R}, \leqslant$ et $\mathbb{R}, \geqslant$ sont isomorphes

Les ordonnés $\mathbb{R}^+, \leqslant$ et $\mathbb{R}^+, \geqslant$ NE sont PAS isomorphes.

Les ordonnés $\mathbb{R}^+, \leqslant$ et $\mathbb{R}^-, \geqslant$ sont isomorphes

EX Dans tout ordonné $E, \leqslant$

On exprime les formules

$$P \subset \text{mij maj } P \quad \text{et} \quad P \subset \text{maj mij } P$$

en disant que les transformations

$$\text{mij} \circ \text{maj} \quad \text{et} \quad \text{maj} \circ \text{mij} \quad \text{de } \mathcal{P}E, \subset$$

sont EXPANSIVES

EX Les transformations mij et maj de $\mathcal{P}E, \subset$

sont DÉCROISSANTES

EX Les transformations mij maj et maj mij de $\mathcal{P}E, \subset$

sont CROISSANTES

EX $\forall P \subset E, \leqslant$:

$$\text{mij maj mij } P = \text{mij } P$$
$$\text{maj mij maj } P = \text{maj } P$$

✻ $\text{mij maj} \circ \text{mij } P \supset \text{mij } P$ (expansion)

$\text{maj mij } P \supset P$ (expansion)

$\text{mij} \circ \text{maj mij } P \subset \text{mij } P$ (décroissance) ■