REELS et ORDRE

THÉORÈME DU PLUS PETIT MAJORANT

Pour tout ensemble NON VIDE de **R**,≤

majoré	=	suprémé
minoré	=	infimé
borné	=	suprémé et infimé

THÉORÈME DU PLUS GRAND MINORANT.

* Démonstration binaire

Voici un ensemble majoré non vide E de **R** ≤

Appelons z le plus grand entier rationnel tel que

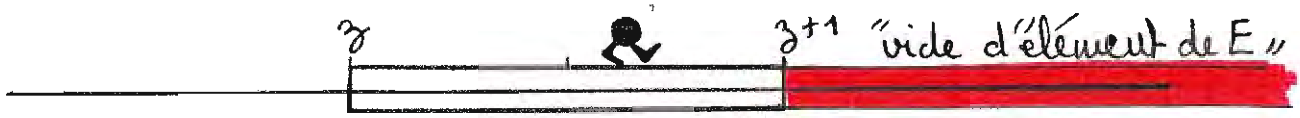
$$E \cap [z, z+1] \neq \emptyset$$

Posons $s_0 = [z, z+1]$

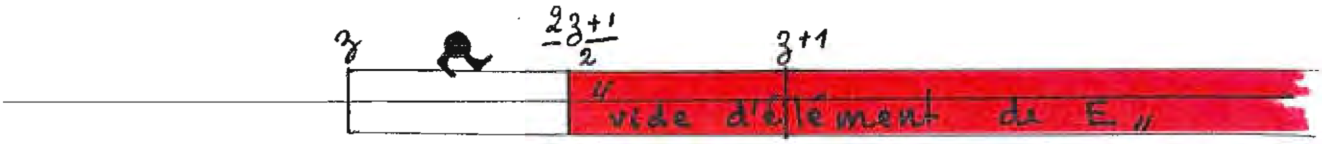
L'ensemble des majorants stricts de s_0 ne comprend aucun élément de E

On définit par induction la suite binaire s_n d'intervalles fermés emboîtés

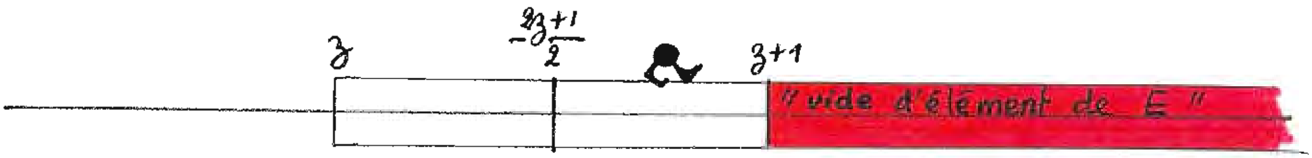
Le milieu de s_n définit de manière évidente deux intervalles fermés de s_n



Ou bien



Ou bien



s_{n+1} est une de ces deux moitiés satisfaisant à la condition

l'Ensemble des majorants stricts de s_{n+1} ne comprend aucun élément de E.

La suite s_n définit le réel s

$$\{ s \} = \bigcap_n s_n$$

Pour tout réel $x > s$, il existe s_n tel que x soit majorant strict de s_n

Pour tout réel $x > s$: $x \notin E$

s majore E

Pour tout $n \in \omega$ $s_n \cap E \neq \phi$

Tout voisinage de s contient au moins un s_n

s adhère à E

$s = \sup E$ ∎

Toute partie de $\overline{\mathbf{R}}$ est suprémée et infimée

Toute partie non vide de $\mathbf{R}^+$ est infimée

Toute partie majorée non vide de $\mathbf{R}^+$ est infimée et suprémée.

$\forall X \subset \overline{\mathbf{R}}$ $-\infty \in \text{mi}j\, X$

$+\infty \in \text{maj}\, X$

$\text{mi}j\, \phi = \overline{\mathbf{R}}$

$\sup \phi = \min \text{maj}\, \phi = \min \overline{\mathbf{R}} = -\infty$

$\inf \phi = \max \text{mi}j\, \phi = \max \overline{\mathbf{R}} = +\infty$

Pour tout fermé non vide de $\mathbf{R}$

majoré = maximé | minoré = minimé

borné = maximé et minimé

Tout fermé non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ est maximé et minimé

Tout fermé non vide de $\mathbf{R}^+$ est minimé

Pour tout fermé non vide de $\mathbf{R}^+$ majoré = maximé et minimé

CONVEXE

= Ensemble qui contient tout segment dont les extrémités lui appartiennent.

Cette définition suppose la notion de SEGMENT définie par le contexte.
Elle s'applique notamment aux parties de $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$, Π et des vectoriels réels

Pour toute partie K de $\overline{\mathbb{R}}$

K CONVEXE

ssi

$$x, y \in K \Rightarrow [x, y] \subset K$$

Grâce au théorème du plus petit majorant :

Pour tout ensemble inclus dans $\overline{\mathbb{R}}$

borné fermé convexe = intervalle fermé

Si A et B sont des ensembles suprémés de réels
Alors $\sup (A+B) = \sup A + \sup B$

Dans l'ordonné $\mathbb{R}, \leq$

PROPOSITION 1

Si A et B sont des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$

$A \subset B$

$\forall x \in B \setminus A, \exists y \in A : y > x$

Alors $\sup A = \sup B$

EXEMPLE

Les ensembles $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

satisfont à l'hypothèse de la proposition.

$$\sup A = 1 = \sup B$$

Démonstration

- $\sup B$ majore B

  $\sup B$ majore A $\qquad (A \subset B)$

  $\sup A$ est le plus petit majorant de A

  $\sup A \leq \sup B \qquad (1)$

- Voici $x \in B$

Ou bien $x \in A$	Ou bien $x \in B \setminus A$
$\sup A \geq x$	$\exists y \in A : y > x$
	$\sup A \geq y > x$
	$\sup A > x$

  Donc $\sup A$ majore B

  $\sup B$ est le plus petit majorant de B

  $\sup A \geq \sup B \qquad (2)$

- (1) et (2) entraînent $\sup A = \sup B$

c.q.f.d.

PROPOSITION 2

Si A, B sont des parties non vides, majorées de $\mathbb{R}$

Alors $\sup A + \sup B = \sup (A + B)$

EXEMPLE

$A = [2 \; ; \; 3]$; $B = [-3 \; ; \; 4]$

$A + B = \{a + b \mid a \in A \; ; \; b \in B\}$

$= [-1 \; ; \; 7]$

$\sup(A + B) = 7 = 3 + 4 = \sup A + \sup B$

Démonstration

- Voici $a + b \in A + B$; avec $a \in A$, $b \in B$

$$a \leq \sup A$$
$$b \leq \sup B$$
$$a + b \leq \sup A + \sup B$$

$\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$

$\sup(A + B)$ est le plus petit majorant de $A + B$

$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$

- Montrons que $\boxed{\sup(A + B) < \sup A + \sup B}$ entraîne une contradiction

Posons $m = \sup A$; $n = \sup B$; $p = \sup(A + B)$

$p < m + n$

Posons $r = m + n - p$

$r > 0$

$$m - \frac{r}{2} < m \qquad (r > 0)$$

$\exists\, x \in A$: $$m - \frac{r}{2} < x < m \qquad (m = \sup A)$$

$$n - \frac{r}{2} < n \qquad (r > 0)$$

$\exists\, y \in B$: $$n - \frac{r}{2} < y < n \qquad (n = \sup B)$$

$$m + n - r < x + y < m + n$$

$$p < x + y < m + n$$

$\boxed{x + y > p \text{ \underline{et} } x + y \in A + B}$ contredit $\boxed{p = \sup(A + B)}$

<u>Donc</u> $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c.q.f.d.

EX

Dans $\mathbf{R}, +, \mathcal{T}_{us}$

$$\boxed{\text{Sous-groupe fermé non trivial} \;=\; a\mathbf{Z} \qquad a \in \mathbf{R}_0^+}$$

▶ H = sous-groupe fermé , $H \neq \{0\}$, $H \neq \mathbf{R}$

✲ $H \cap \mathbf{R}_0^+$ est une partie minorée de $\mathbf{R}, \leqslant$

⊢ $H \cap \mathbf{R}_0^+$ est infimé

▶ $a = \inf H \cap \mathbf{R}_0^+$

✲ a adhère à H

H est fermé

⊢ $a \in H$

● $a \neq 0$

a est le plus petit réel non nul de H

⊢ $H = a\mathbf{Z}$

● $a = 0$

dans ce cas 0 est point d'accumulation de H

... et H est dense dans $\mathbf{R}$.

H est fermé

⊢ $H = \mathbf{R}$ ce qui a été exclu ■