5 CONNEXES

FERMOUVERT = Fermé ouvert

Fermouverts TRIVIAUX de l'espace $E,\mathcal{T}$: ϕ et E

CONNEXE = Espace dont tout fermouvert est trivial

NON CONNEXE = Espace qui contient un fermouvert non trivial

= Espace réunion de deux ouverts non vides disjoints

= Espace réunion de deux fermés non vides disjoints

Pour toute partie P de l'espace topologique $E,\mathcal{T}$

P connexe $\underline{\underline{\text{ssi}}}$ le sous-espace $P,\mathcal{T}_P$ est connexe

P non connexe

$\underline{\underline{\text{ssi}}}$

$\exists\, U,V \in \mathcal{T} \qquad P \subset U \cup V,\ U \cap P \neq \phi \neq P \cap V,\ P \cap U \cap V = \phi$

La partie P de l'espace topologique $E,\mathcal{T}$ est NON connexe.

$P,\mathcal{T}_P$ est non connexe.

$P,\mathcal{T}_P$ ne contient pas de fermouvert (non trivial).

il existe un ouvert et un fermé de $E,\mathcal{T}$ traçant sur P la même partie non triviale.

il existe deux ouverts de $E,\mathcal{T}$ dont les traces sur P partagent P (en deux pièces non vides).

il existe deux fermés de $E,\mathcal{T}$ dont les traces sur P partagent P (en deux pièces non vides).

Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ sont des topologies sur E telles que $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$

Alors $E, \mathcal{U}$ connexe $\Rightarrow$ $E, \mathcal{T}$ connexe

$E, \mathcal{T}$ non connexe $\Rightarrow$ $E, \mathcal{U}$ non connexe

$\blacksquare$

Raffiner (= accroître) la topologie renforce la NONCONNEXITÉ

Affaiblir la topologie renforce la CONNEXITÉ. $\blacksquare$

L'espace topologique vide est connexe $\blacksquare$

Un espace topologique est non connexe

ssi

un de ses points appartient à un fermouvert propre

ssi

chacun de ses points appartient à un fermouvert propre

$\blacksquare$

L'espace vide et les espaces singletons sont connexes.

Les espaces topologiques minimaux $E, \{\emptyset, E\}$ sont connexes.

Les espaces discrets, ni vides, ni singletons, sont non connexes.

Pour les espaces topologiques de cardinal 2 : Non connexe = Discret .

Pour toutes topologies $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ d'espace E , la connexité de $\mathcal{U}$ entraîne celle de $\mathcal{T}$.

Un espace topologique *non vide* est connexe

SSI chacun de ses points appartient à un fermouvert non trivial.

Espaces topologiques sur $3 = \{0,1,2\}$.

Quels sont les connexes parmi ces espaces ?

CONTINUITÉ respecte CONNEXITÉ

SI $f : E, \mathcal{T} \longrightarrow F, \mathcal{U}$ continue et $P \subset \operatorname{dom} f$

ALORS P connexe $\Rightarrow$ fP connexe.

On va prouver la contraposée

fP non connexe $\Rightarrow$ P non connexe.

* fP non connexe

$$\left.\begin{array}{l} fP \subset T \cup V \\ T, V \in \mathcal{U} \\ T \cap fP \neq \phi \neq V \cap fP \\ fP \cap T \cap V = \phi \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} P \subset f^{-1}T \cup f^{-1}V \\ f^{-1}T,\ f^{-1}V \in \mathcal{T} \\ P \cap f^{-1}T \neq \phi \neq P \cap f^{-1}V \\ P \cap f^{-1}T \cap f^{-1}V = \phi \end{array}\right.$$

P non connexe

■

Une CARACTERISATION de la CONNEXITE

$E, \mathcal{T}$ est CONNEXE

ssi

toute application continue de $E, \mathcal{T}$ dans tout espace discret est constante .

$\Downarrow$

- $E, \mathcal{T}$ connexe
- $f : E, \mathcal{T} \longrightarrow F, \mathcal{P}F$ continue

* $\emptyset \neq fE$ connexe $\vdash$ fE singleton $\vdash$ f constante .

$\Uparrow$

On établit la contraposée : Si $E, \mathcal{T}$ *non connexe ,*
alors il existe une application continue *non constante* de E, τ *dans* un espace discret .

- $E, \mathcal{T}$ non connexe .
- $U, V \in \mathcal{T} \quad \wedge \quad U \neq \emptyset \neq V \quad \wedge \quad U \cap V = \emptyset \quad \wedge \quad U \cup V = E$

*

$$f : E, \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{2}, \mathcal{P}\mathbf{2} \;:\; x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

est une application continue *non constante* de $E, \mathcal{T}$ dans un espace discret

Recouvrement CONNEXE

= Recouvrement dont les pièces sont connexes .

(35)

Δ Recouvrement CONNEXE

= Recouvrement dont les pièces sont connexes.

Tout espace qui admet un recouvrement connexe dont l'intersection est non vide est connexe.

Voici un recouvrement connexe $\mathcal{H}$ de l'espace $E, \mathcal{T}$ tel que $p \in \bigcap \mathcal{H}$

On procède par l'absurde. On suppose E non connexe

$E = T \cup V$

$\emptyset = T \cap V$

$\emptyset \neq T \in \mathcal{T}$

$\emptyset \neq V \in \mathcal{T}$

$p \in T$

$p \notin V$

$\forall K \in \mathcal{H} \quad p \in K$

$K \subset T \cup V$

$\emptyset = T \cap V \cap K$

$p \in T \cap K$

$T \cap K \neq \emptyset$

K connexe

$V \cap K = \emptyset$

$\forall K \in \mathcal{H} \quad V \cap K = \emptyset$

$V = \bigcup \{ V \cap K \mid K \in \mathcal{H} \} = \emptyset$

Absurde !

■

Le produit topologique d'une suite finie d'espaces connexes
est connexe

Il suffit d'établir que

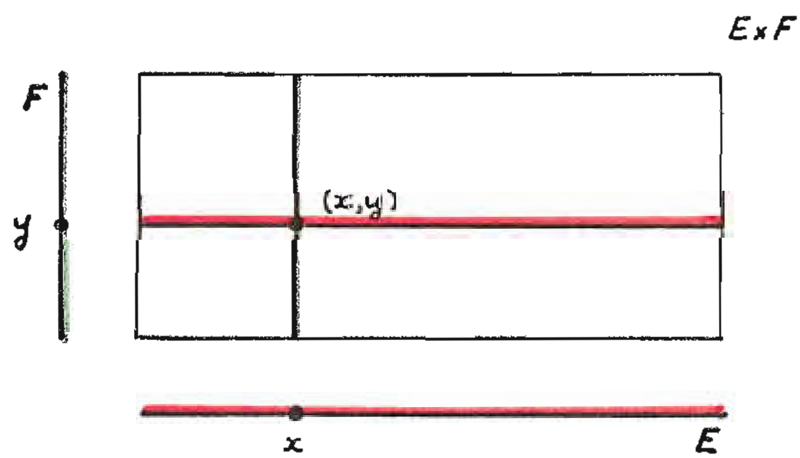
Le produit topologique de deux espaces connexes
est connexe

▶ $E, \mathcal{T}$ et $F, \mathcal{U}$ des espaces connexes .

✱ $\forall\ (x,y) \in E \times F$: $E \times \{y\}$ connexe $\wedge$ $\{x\} \times F$ connexe
$\forall\ (x,y) \in E \times F$: $(E \times \{y\}) \cap (\{x\} \times F) = \{(x,y)\}$

$\vdash$ $\forall\ (x,y) \in E \times F$: $(E \times \{y\}) \cup (\{x\} \times F)$ connexe

5]



$$\{\ (E \times \{y\}) \cup (\{x\} \times F)\ \mid\ (x,y) \in E \times F\ \}$$

est un recouvrement connexe de $E \times F$
dont les pièces se rencontrent deux à deux

$\vdash$ $E \times F$ est connexe *pour la topologie produit*

L'adhérence de tout connexe est connexe

On va prouver la contraposée

Pour toute partie P d'un espace topologique $E, \mathcal{T}$

adh P non connexe $\Rightarrow$ P non connexe

$\text{adh } P \subset T \cup V$	$P \subset T \cup V$
$T, V \in \mathcal{T}$	
$T \cap V \cap \text{adh } P = \emptyset$	$T \cap V \cap P = \emptyset$
$\emptyset \neq T \cap \text{adh } P$	$\emptyset \neq T \cap P$
$\emptyset \neq V \cap \text{adh } P$	$\emptyset \neq V \cap P$

P non connexe ■

La réciproque de ce théorème est fausse

- l'adhérence d'un épointé non connexe d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$ est un intervalle fermé connexe.

Voici un point p de l'espace E, τ

Appelons $\mathcal{K}_p$ l'ensemble des connexes de E, τ qui comprennent p.

$$\bigcup \mathcal{K}_p \in \mathcal{K}_p$$

$\bigcup \mathcal{K}_p$ est le plus grand connexe de E, τ qui comprenne p ■

$$\boxed{\bigcup \mathcal{K}_p = \underline{\max}(\mathcal{K}_p, \subset)}$$

▲ <u>Composante connexe = connexe maximal</u>

* Tout point d'un espace topologique appartient à une et une seule composante connexe ■

$$\boxed{\bigcup \mathcal{K}_p \text{ } \underline{\text{est}} \text{ LA } \underline{\text{composante connexe du point } p}}$$

<u>Toute composante connexe est fermée</u> ■

: <u>L'ensemble des composantes connexes d'un espace non vide est une partition fermée</u> ■

Un espace non vide est connexe ssi il ne contient qu'une seule composante connexe ■

<u>Si</u> <u>p est un point de l'espace topologique</u> $E, \mathcal{T}$
<u>ALORS</u> $E, \mathcal{T}$ <u>connexe</u> $\Longleftrightarrow$ <u>E est le seul fermouvert (de $E, \mathcal{T}$) qui comprenne p.</u> ■

1. Tout espace topologique qui ne comprend qu'un seul point est connexe.

1'. Tout singleton est connexe

2. L'espace topologique $E, \{E, \phi\}$ est connexe

3. <u>Si</u> $\# E \neq 1$ <u>Alors</u> l'espace $E, \mathcal{P}_E$ est non connexe

4. Un espace topologique est NON CONNEXE ?

<u>ssi</u>

Il admet une partition fermée non singletonne.

$E, \mathcal{T}$ connexe

ssi

$\nexists\, A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\phi, E\} : A \cap B = \phi \wedge A \cup B = E$

ssi

$\nexists\, A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\phi, E\} : A \Delta B = E$

ssi

$\nexists\, A, B$ fermés non vides : $A \Delta B = E$

ssi

E et ϕ sont les seuls fermouverts de $E, \mathcal{T}$

ssi

E et ϕ sont les seules parties à frontière vide

ssi

Toute fonction continue $E, \mathcal{T} \to 2, \mathcal{P}_2$ est constante

ssi

Toute fonction continue de $E, \mathcal{T}$ dans tout espace discret est constante

ssi

Il n'existe aucune surjection continue $E, \mathcal{T} \to 2, \mathcal{P}_2$

ssi

Dans $\mathcal{C}E = \{ f : E, \mathcal{T} \to \mathbb{R}, \mathcal{T}_{us} \mid f \text{ continue} \}, +, \cdot$
la fonction constante 1 n'a que deux racines carrées