6. REELS et CONNEXITE

$\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_{us}$ est Connexe

▷ A fermouvert de $\overline{\mathbf{R}}$ comprenant $-\infty$

▷ $E = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid [-\infty \; x] \subset A\}$

* $[-\infty \; -\infty] = \{-\infty\} \subset A$

$-\infty \in E$

E non vide de $\overline{\mathbf{R}}$

E est majoré par $+\infty$

$\mathrm{Maj}\, E \neq \emptyset$

En vertu du théorème du plus petit majorant

E est supremé

▷ $m = \sup E$

m adhère à E

$E \subset A \Rightarrow \mathrm{adh}\, E \subset \mathrm{adh}\, A$

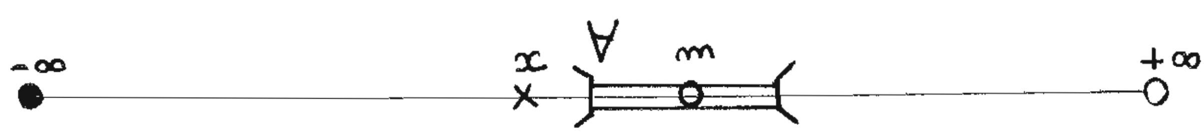
m adhère au fermé A

$m \in A$

reste à montrer 1°. $E = [-\infty \; m]$

2°. $m = +\infty$

1°. ▷ $x < m$



On a

Onézalor

et $x \in E$

d'où $[-\infty \; x] \subset A$

$x \in A$

d'où $[-\infty \; m[\subset A$

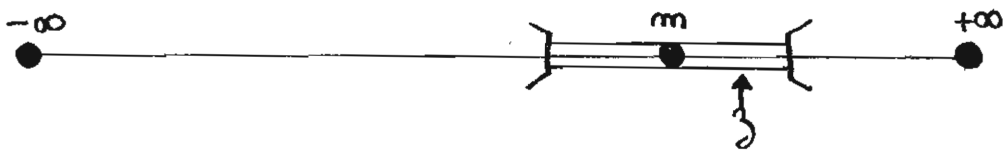
et $m \in A$

$$[-\infty \; m[\cup \{m\} = [-\infty \; m] \subset A$$

$$E = [-\infty \; m]$$

Si par absurde $m \neq +\infty$

Alors A fermouvert, donc ouvert contient un intervalle ouvert non vide centré en m



$$z \in A \quad \wedge \quad m < z$$

$$[-\infty \; m] \cup]m-\varepsilon \; z] = [-\infty \; z] \subset A$$

$\operatorname{Max} E = m < z \in E$!

ctd.

$$m = +\infty$$

et $E = [-\infty \; +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\mathbb{R}} \subset A \subset \overline{\mathbb{R}}$$

$$A = \overline{\mathbb{R}}$$

Tout arc fermé est connexe ■

Tout arc est réunion d'un ensemble d'arcs fermés dont l'intersection n'est pas vide. cf. page 35.

Tout cycle est la réunion de deux arcs fermés non disjoints ■

ARCS et CYCLES sont CONNEXES.

Toutes les droites du plan Π sont connexes

Toutes les droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ sont connexes

$\Pi = \bigcup \mathcal{D}_0$ ($\mathcal{D}_0$ = ensemble des droites de Π qui comprennent o)

Π est connexe

$\mathbb{R}^n$ est connexe

Tout disque de Π est connexe

Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est connexe. ■

$\square$ Dans $\mathbf{R}$ — Dans $\overline{\mathbf{R}}$ — Dans $\mathbf{R}^+$

CONNEXE = CONVEXE

Établissons d'abord Connexe $\Rightarrow$ Convexe
ou, par contraposition $\square$ non convexe $\Rightarrow$ non connexe

✱ Voici un non convexe E de $\mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^+$
Il existe des points $a < p < b$ (de $\mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^+$)
tels que $a \in E \quad p \notin E \quad b \in E$

Posons $U = E \cap [-\infty, p[$
et $V = E \cap \,]p, +\infty]$

$a \in U \qquad b \in V$

U et V sont des ouverts non vides de $E, \mathcal{T}_E$ tels que

$$E = U \cup V \quad \text{et} \quad \emptyset = U \cap V$$

E non connexe ■

Reste à prouver

Tout convexe de $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^+$ est connexe.

* Voici un convexe K de $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^+$

• **Si** $K = \emptyset$ **Alors** K connexe

Supposons $K \neq \emptyset$
Voici $p \in K$

$$K = \bigcup_{k \in K} [p\ k]$$

Donc K connexe ■

■

Tous les épointés de $\mathbb{R}$ sont homéo et non connexes
L'ensemble des composantes connexes de tout épointé de $\mathbb{R}$ est une paire d'arcs ouverts.
$\mathbb{R}$ admet exactement deux épointés connexes ; ils sont tous deux des arcs semi-ouverts
Tous les épointés non convexes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont homéo ;
L'ensemble des composantes connexes de tout épointé non convexe de $\overline{\mathbb{R}}$ est une paire d'arcs semi-ouverts.
$\mathbb{R}^+$ admet un seul épointé connexe, et c'est un arc ouvert
Tous les épointés non connexes de $\mathbb{R}^+$ sont homéos
Tout épointé non connexe de $\mathbb{R}^+$ comprend exactement deux composantes connexes : un arc ouvert et un arc semi ouvert.

	Nombre d'épointés connexes
ARC FERMÉ	2
ARC OUVERT	0
ARC SEMI-OUVERT	1
CYCLE	TOUS.

Arcs fermés — Arcs ouverts — Arcs semi-ouverts — Cycles

forment quatre classes distinctes d'homéomorphie

Tout épointé d'un arc ouvert admet exactement deux arcs ouverts comme composantes connexes.
Les deux épointés connexes d'un arc fermé sont des arcs semi-ouverts.
Tout épointé non connexe d'un arc fermé admet exactement deux arcs semi-ouverts comme composantes.
L'épointé connexe d'un arc semi-ouvert est un arc ouvert
Tout épointé non connexe d'un arc semi-ouvert admet exactement deux composantes connexes : l'une est un arc ouvert, l'autre un arc semi-ouvert
Tout épointé d'un cycle est un arc ouvert.

Dans $\mathbf{R}$ — Dans $\overline{\mathbf{R}}$ — Dans $\mathbf{R}^+$

CONNEXE BORNÉ FERMÉ
= CONVEXE BORNÉ FERMÉ
= INTERVALLE FERMÉ

Dans $\overline{R}$ connexe fermé = convexe fermé = Intervalle fermé

Dans R^+ connexe fermé majoré = convexe fermé majoré
= intervalle fermé

Pour tout arc fermé F
a est extrémité de F
$\underline{\underline{m'}}$
$F \setminus \{a\}$ convexe

Pour tout arc semi ouvert S
a est origine de S
$\underline{\underline{m'}}$
$S \setminus \{a\}$ connexe.

<u>Tout arc fermé a exactement deux extrémités</u>
<u>Tout arc semi-ouvert comprend une et une seule origine</u>
<u>Tout homéo d'un arc sur un arc applique</u>
<u>origine sur origine et extrémité sur extrémité</u>

Le sous-espace $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}, \mathcal{T}_{us}$ est non connexe.

La réunion de deux intervalles non vides disjoints de $\mathbb{R}$ est un sous-espace non connexe.

La réunion de deux droites disjointes est une partie non connexe du plan euclidien

$\mathbb{R}_0^+$ et $\mathbb{R}_0^-$ sont fermouverts non triviaux de $\mathbb{R}_0$ ... qui est donc non connexe.

Toute droite épointée est non connexe.

En plan euclidien, la réunion de deux disques ouverts tangents disjoints est non connexe.

En plan euclidien, le complément d'une droite est non connexe.

Toute partie discrète ni vide ni singletonne est non connexe.

Montrer intuitivement que l'intersection de deux parties connexes peut être non connexe.

Prouver par un contre-exemple que l'intersection de deux parties connexes peut être non connexe.

La réunion de deux parties connexes non disjointes est connexe.

Généraliser l'EX précédent.

Le produit cartésien de deux connexes est connexe.

L'adhérence d'une partie connexe est une partie connexe.

L'intérieur d'une partie connexe est-il une partie connexe ?

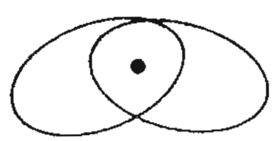
L'un des plaisirs de la mathématique consiste à tester une théorie
en tentant d'y prouver des assertions intuitivement évidentes

Ainsi, ne semble-t-il pas évident
qu'en attachant l'un à l'autre deux objets d'un seul tenant ,
on obtienne un tout d'un seul tenant ?

Traduction en version topologique

— *La réunion de deux (parties) connexes non disjointes est connexe.*

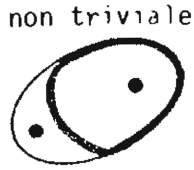
Connexes non disjointes



● **abs** la réunion est non connexe

► Un ouvert et un fermé de l'espace tracent sur la réunion *la même partie non triviale.*

* Cet ouvert et ce fermé ont même trace non triviale sur l'un des connexes



! ■

□ *Pour tout ensemble $\mathcal{K}$ de parties connexes d'un espace topologique :*

$$\cap\mathcal{K} = \emptyset \Rightarrow \cup\mathcal{K} \text{ connexe .}$$

EX Aucun cycle n'est arc.

EX Aucun cycle n'est inclus dans un arc.

✻ Aucun point ne déconnecte un cycle
Certains points déconnectent un arc ■

EX Il n'existe pas d'injection continue d'un cycle dans un

EX Il n'existe pas d'injection continue $\Gamma \to \mathbb{R}$
(où Γ = cercle de Π de centre o et de rayon 1)

■

EX ϕ est un intervalle ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$

EX Tout connexe non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ est
intervalle ouvert OU intervalle semi-ouvert OU intervalle

► C connexe non vide de $\bar{\mathbb{R}}$

✻ C est suprémée et infimée

► a = inf C
► b = inf C

$\vdash$ $C \subset [a,b]$

dans $\bar{\mathbb{R}}$: connexe = convexe $\vdash$

- $a \in C \wedge b \in C \Rightarrow C = [a,b]$
- $a \in C \wedge b \notin C \Rightarrow C = [a,b[$
- $a \notin C \wedge b \in C \Rightarrow C =]a,b]$
- $a \notin C \wedge b \notin C \Rightarrow C =]a,b[$ ■

EX

Dans $\mathbb{R}$ — dans $\bar{\mathbb{R}}$ — dans $\mathbb{R}^+$

CONNEXE = intervalle ouvert
OU
intervalle semi-ouvert
OU
intervalle fermé

?

En arc

CONNEXE INFINI = ARC