12

Résolution d'équations linéaires

1. Equations

- Equations à une inconnue ?

$$2x - 4 = 5x + 8 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}x = 3 - 2(x-1) - \frac{7}{8} \qquad (2)$$

$$2(6x-1) = 4 + 7x^2 \qquad (3)$$

$$0x = 0 \qquad (4)$$

$$y^2 = 4 \qquad (5)$$

. . .

- Equations à plus d'une inconnue ?

$$5{,}2x + 3y = 4{,}6 \qquad (6)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (7)$$

$$xy = -6 \qquad (8)$$

$$0x + 0y = 1 \qquad (9)$$

$$2a - 3ab + b^2 = b^3 - 5 \qquad (10)$$

$$x + y + z = 0 \qquad (11)$$

. . .

- Les équations 1, 2, 4, 6, 9, 11 sont appelées <u>linéaires</u>.

1, 2, 6, 11	sont du premier degré
3, 5, 7, 8	du second degré
10	du troisième degré

Nous désignerons souvent les équations par des lettres fléchées.
L'ensemble des solutions de l'équation $\vec{e}$, dans un ensemble qui a été fixé, est noté sol $\vec{e}$. Ainsi

Si $\vec{e} = (x^2 - 9 = 0)$

Alors $\text{sol}\,\vec{e} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$
$= \{3, -3\}$

(dans le cas où l'on s'intéresse à la résolution de l'équation $\vec{e}$, dans $\mathbb{R}$)

2. Résolution d'une équation linéaire à une inconnue [1]

centrer

Sauf avis contraire, les équations sont résolues dans $\mathbb{R}$

Voici, par exemple, la résolution de l'équation
$$\vec{e} = (2x - 4 = 5x + 8)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 5x + 8 \\ &\Updownarrow \\ 2x - 5x &= 8 + 4 \\ &\Updownarrow \\ -3x &= 12 \\ &\Updownarrow \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Justifie ces calculs !

$\text{sol}\,\vec{e} = \{-4\}$

Exercices

1. Résoudre les équations linéaires
$$\frac{1}{2}x - 7 = 8\left(3 - \frac{5x}{3}\right)$$
$$5,2x + 3,4x = 6 - 2(7,1x - 3)$$

note [1] : problème déjà abordé en [mm2]

$$4(2x-9) = x-(3-7x)$$
$$4^5 x = 4^{-5}$$
$$2^5 y - 2^{10} = y-1$$
$$(2z+1)^2 = (z-3)(4z+5)$$
$$0x = 0$$

2. Pour toute équation linéaire $\vec{e}$ à une inconnue,
il existe $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\text{sol}\,\vec{e} = \text{sol}\,(ax=b)$$

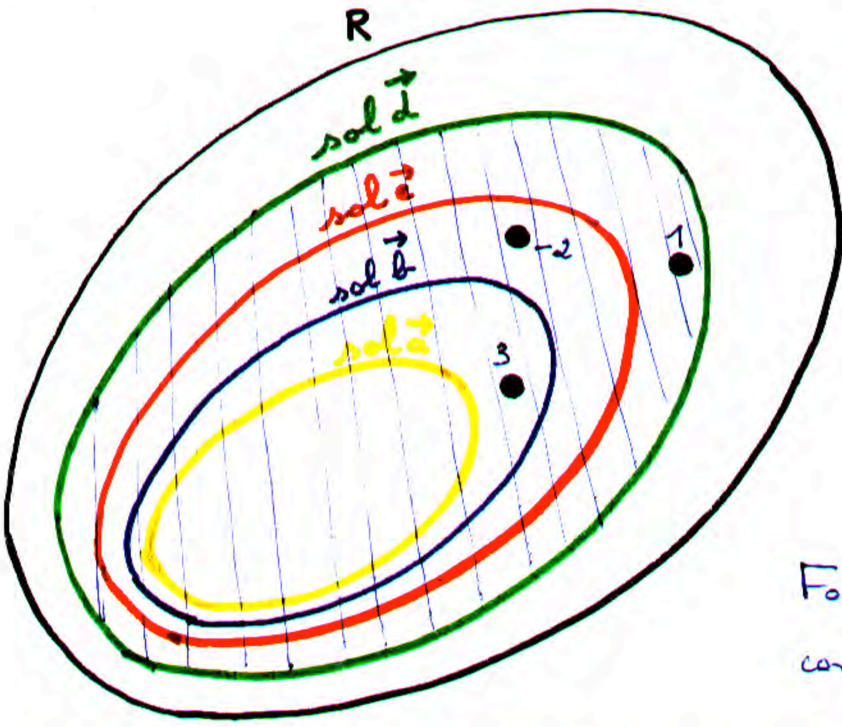
3.

$a, b \in \mathbb{R}$		
$\vec{e} = (ax = b)$		
$a \neq 0$	$a = 0 \neq b$	$a = 0 = b$
$\text{sol}\,\vec{e} = \left\{\frac{b}{a}\right\}$	$\text{sol}\,\vec{e} = \emptyset$	$\text{sol}\,\vec{e} = \mathbb{R}$

4. Présente plusieurs équations très différentes dont l'unique solution est 5

5. $\text{sol}\,(x^2-6x+9=0) =$

6.



Fournis des équations,
compatibles avec ce diagramme.

(ensemble hachuré = ensemble dont tous les éléments sont dessinés)

7. Calcule a, sachant que -2 est solution de

$$3x - a = 2a + x$$

8. Calcule a et b sachant que

$$\mathbb{R} = sol\,(ax - 3 = bx + 5a)$$

9. Si $\{x \in \mathbb{R} \mid ax + b = bx - 3a\} = \phi$

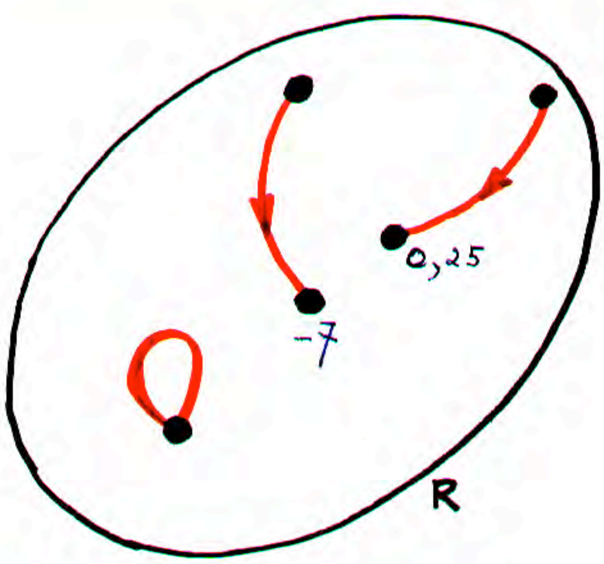
Alors que peux-tu dire des réels a et b ?

10. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 = 6(x-2) \text{ et } 3x - 9 = 3(x-3)\} =$

11. Résoudre

	équation	inconnue	coefficients
En $\mathbb{R}$	$mg = a(2M + m)$	m	$g, a, M \in \mathbb{R}$; $g \neq a$
	$e_1 = e_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$	a	$e_1, e_0, v_0 \in \mathbb{R}$; $t_1 \in \mathbb{R}_0$
	$e_1 = e_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$	v_0	$e_1, e_0, a \in \mathbb{R}$; $t_1 \in \mathbb{R}_0$
En $\mathbb{R}_0$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$	x	$x', f \in \mathbb{R}_0$; $f \neq x'$
	$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	n	$f, R_1, R_2 \in \mathbb{R}_0$; $R_1 \neq R_2$

12.



$f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3$

Nombres représentés par ces points ?

13. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3$ est une permutation de $\mathbb{R}$

14. La fonction $x \longmapsto ax+b$ est une permutation de $\mathbb{R}$

$$\underset{=}{\text{ssi}}$$

$$a \in \mathbb{R}_0$$

15. $\underline{\text{Si}}$ $\quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto ax+b \qquad (a \in \mathbb{R}_0,\ b \in \mathbb{R})$

$\underline{\text{Alors}}$ $\quad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ \ldots$

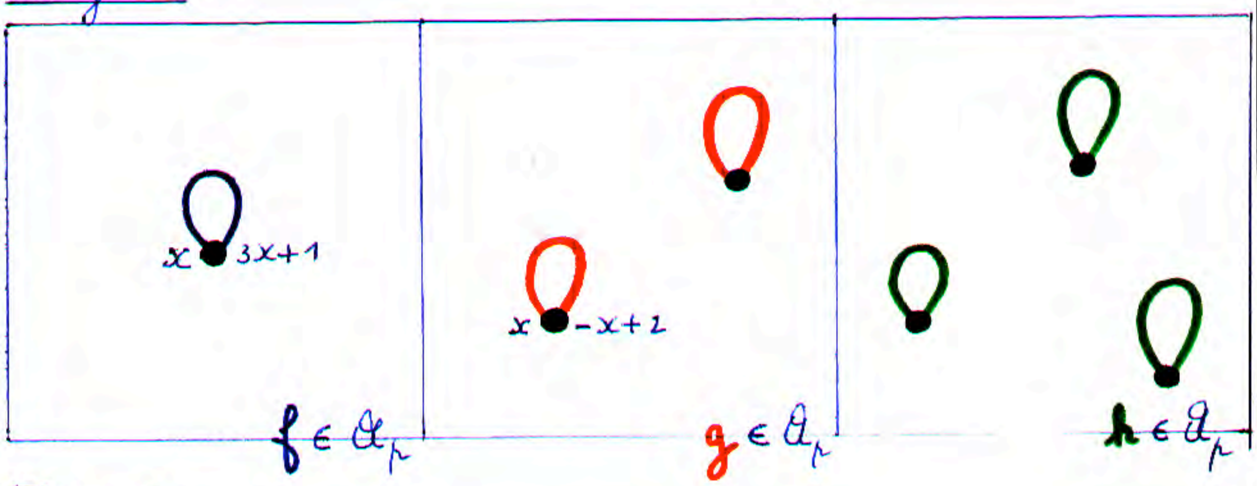
16. $\forall f \in \mathcal{A}_p \qquad f^{-1} \in \mathcal{A}_p$

où $\mathcal{A}_p$ désigne l'ensemble des permutations $x \longmapsto ax+b$ de $\mathbb{R}$

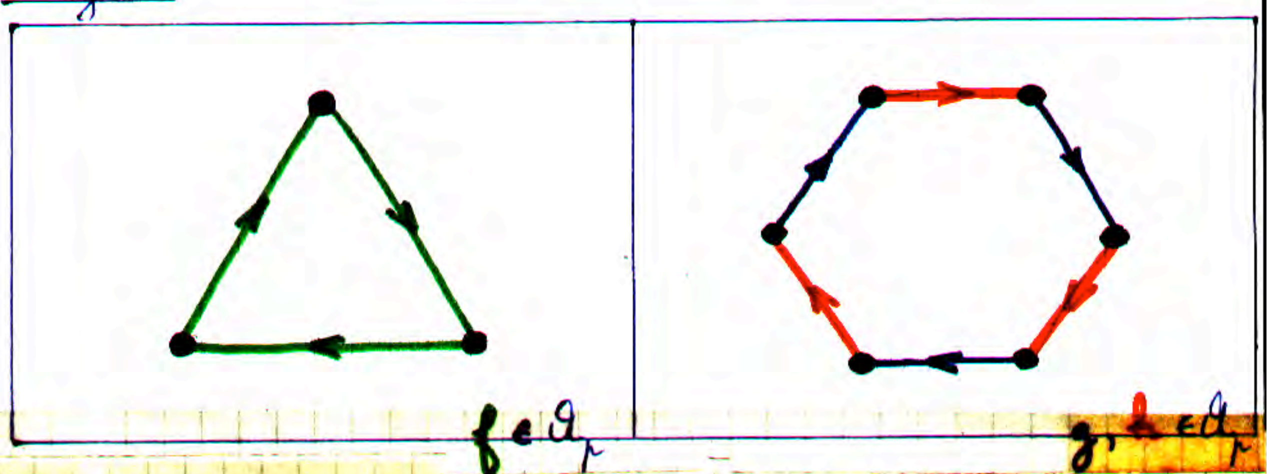
17. $\forall f, g \in \mathcal{A}_p \qquad g \circ f = f \circ g \in \mathcal{A}_p$

18. $\mathcal{A}_p$ est un sous-groupe commutatif du groupe (non commutatif) $\mathcal{S}\mathbb{R}, \circ$

19. Enigmes



20. Enigmes



21. Pour toute permutation $f : x \longmapsto ax+b$ de $\mathbb{R}$

f admet un seul point fixe $\quad \underset{=}{\text{ssi}} \quad a \neq 1$

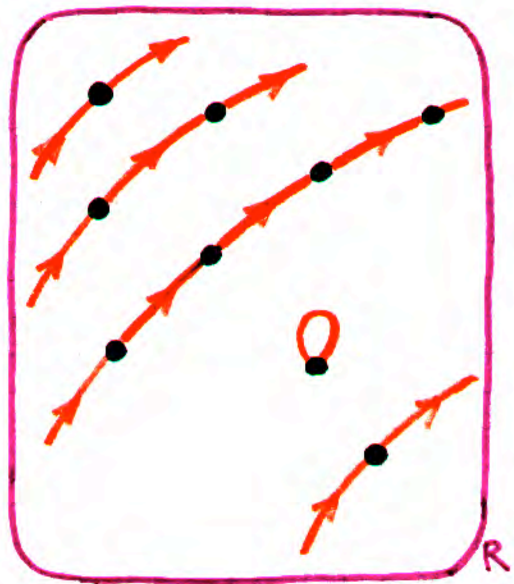
f n'admet pas de points fixes $\quad \underset{=}{\text{ssi}} \quad a = 1$ et $b \neq 0$

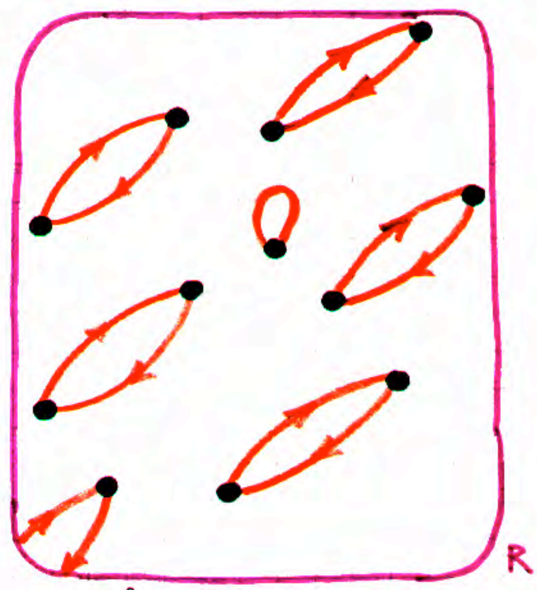
tous les points de f sont fixes $\quad \underset{=}{\text{ssi}} \quad a = 1$ et $b = 0$

22. Pour toute permutation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto ax+b$

ou bien

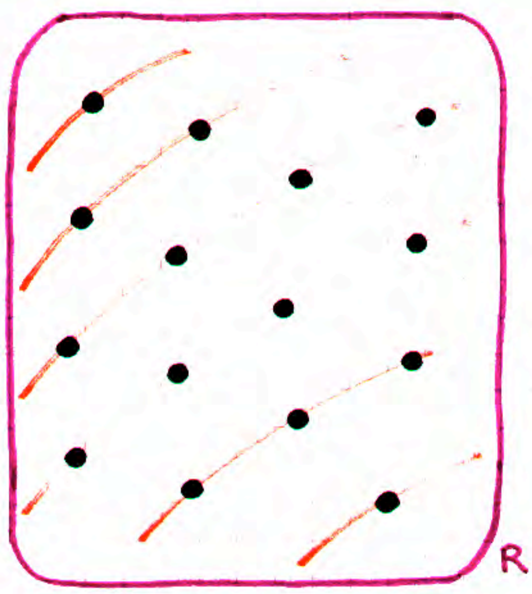
un seul point est fixe





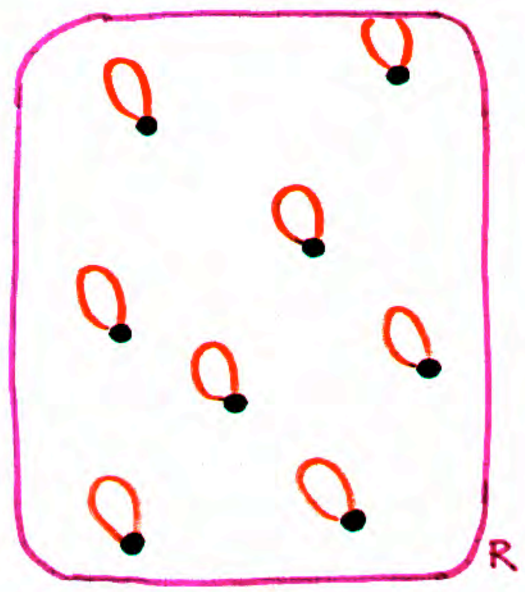
ou bien

aucun point n'est fixe



ou bien

tous les points sont fixes



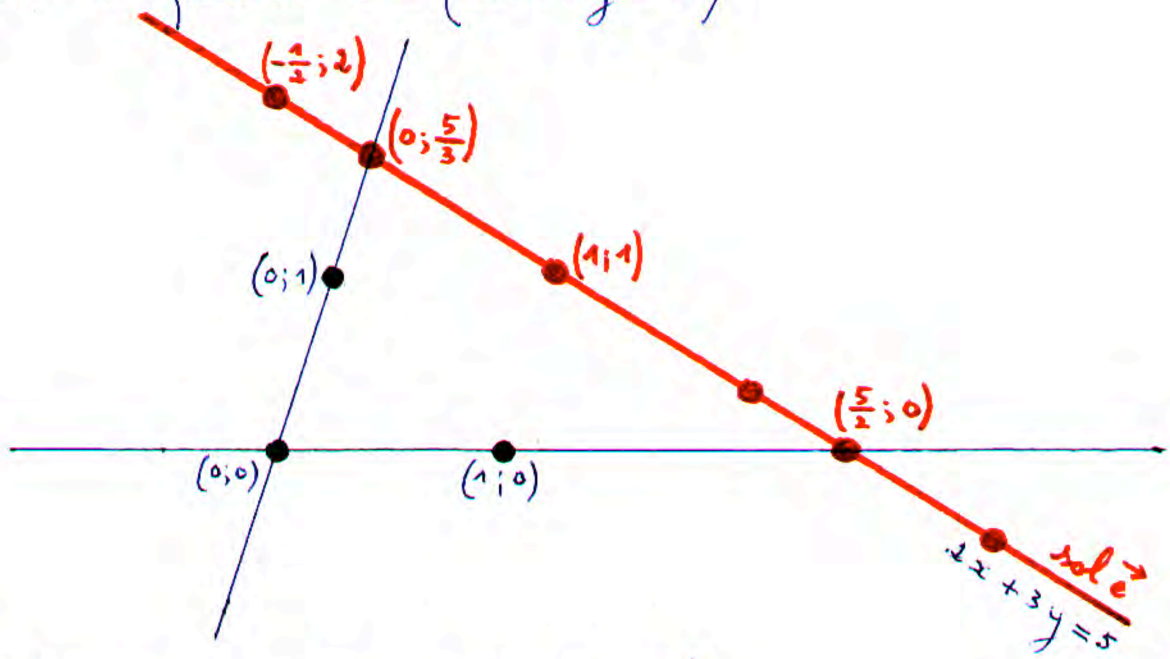
Présente des permutations affines compatibles avec ces graphes.

23. $\vec{e} = \left((3x-2) \cdot (2x+6) \cdot (x+1) = 0 \right)$

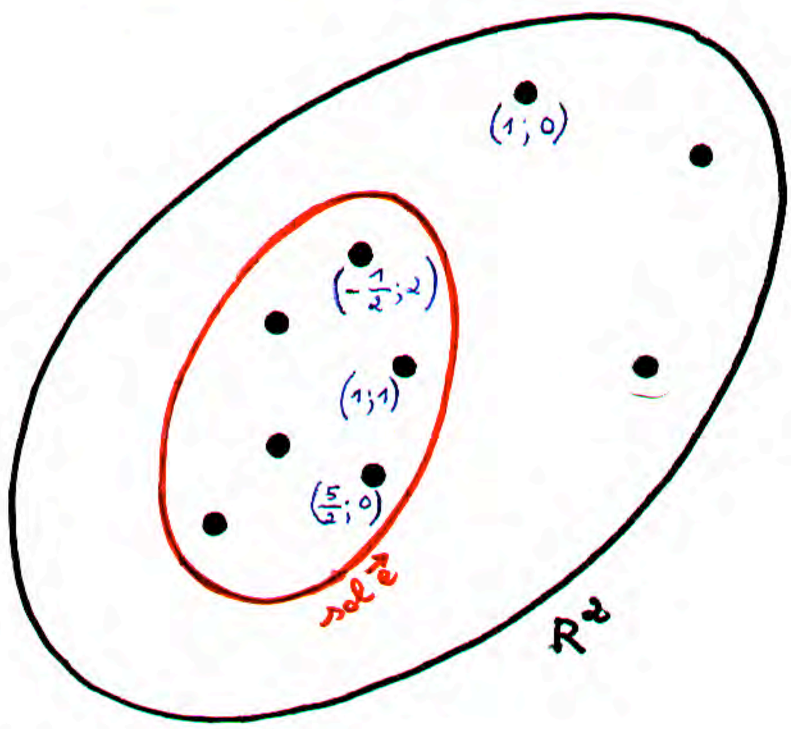
Calcule sol $\vec{e}$, respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, ω.

3. Résolution d'une équation linéaire à deux inconnues

Voici l'équation $\vec{e} = (2x + 3y = 5)$



sol $\vec{e}$ est une partie infinie de $\mathbb{R}^2$



Exercices

1. Dans l'exemple précédent, sol $\vec{e}$ est une partie propre infinie de $\mathbb{R}^2$. Veux-tu présenter une équation linéaire $\vec{e}$, à deux inconnues, telle que

$$\text{sol } \vec{e} = \mathbb{R}^2$$

2. Calcule plusieurs solutions de chacune des équations que voici :

$$x - 4y = 1$$
$$-3x + 5y = 2$$
$$1{,}2x - 3y = 2{,}4$$
$$\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = -2$$
$$0x + 2y = 4$$
$$3x - 0y = -2$$
$$3(-x + 2y) = 2\left(3y - \frac{3}{2}x\right)$$

3. Un procédé pour calculer aisément un grand nombre de solutions d'une équation linéaire à deux inconnues.

Voici $\vec{e} = (-9x + 14y = -8)$

$$(x, y) \in sol\,\vec{e}$$
$$\Updownarrow$$
$$-9x + 14y = -8 \qquad \text{dans } \mathbb{R}, +, \cdot$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{9x - 8}{14}$$

$$\leftarrow sol\,\vec{e} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{9x - 8}{14}\right\}$$
$$= \left\{\left(x, \frac{9x - 8}{14}\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

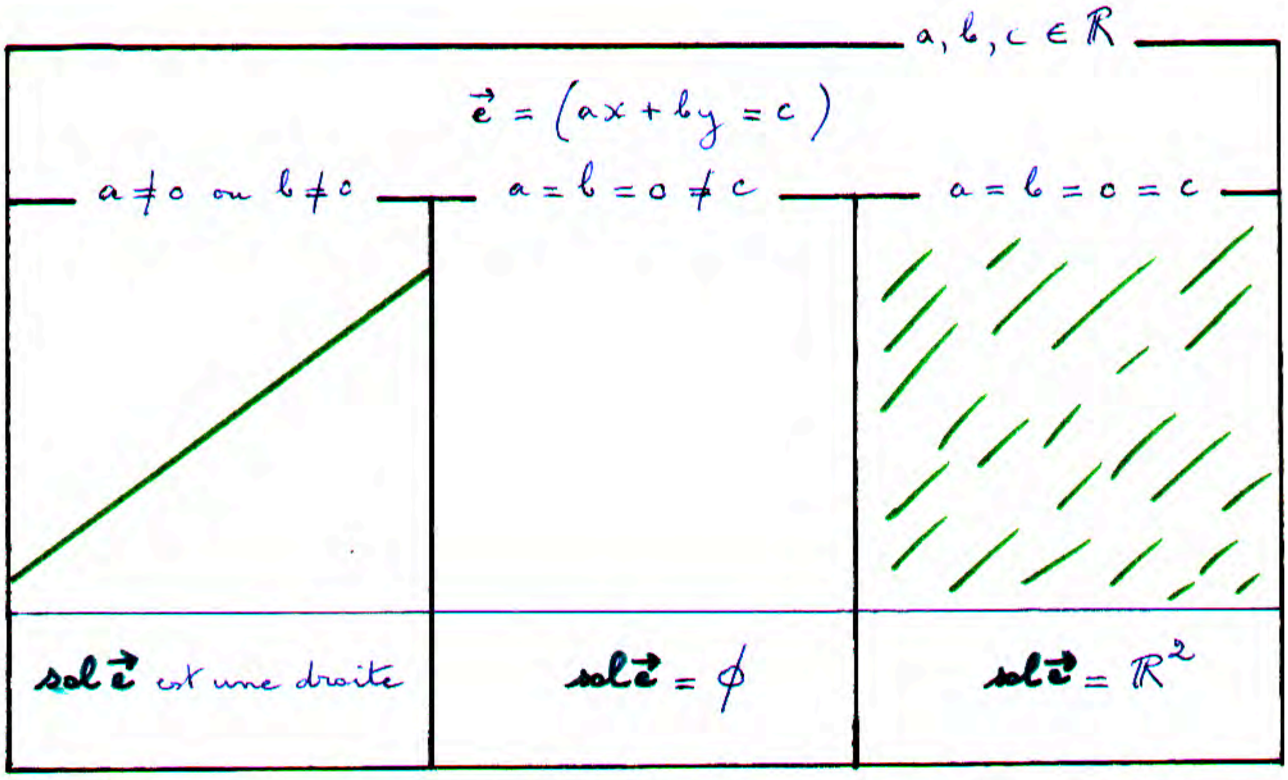
4. Calcule plusieurs solutions de chacune des équations

$$2(x - 6) = 4(y - 3)$$
$$4(x - 2y + 5) - 3(y - 2x + 5) = 0$$
$$2(x - y) = 3(x + y) - (x + 5y + 1)$$
$$x - y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2}$$

5. Pour toute équation linéaire $\vec{e}$ à deux inconnues, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$sol\,\vec{e} = sol\,(ax + by = c)$$

6.



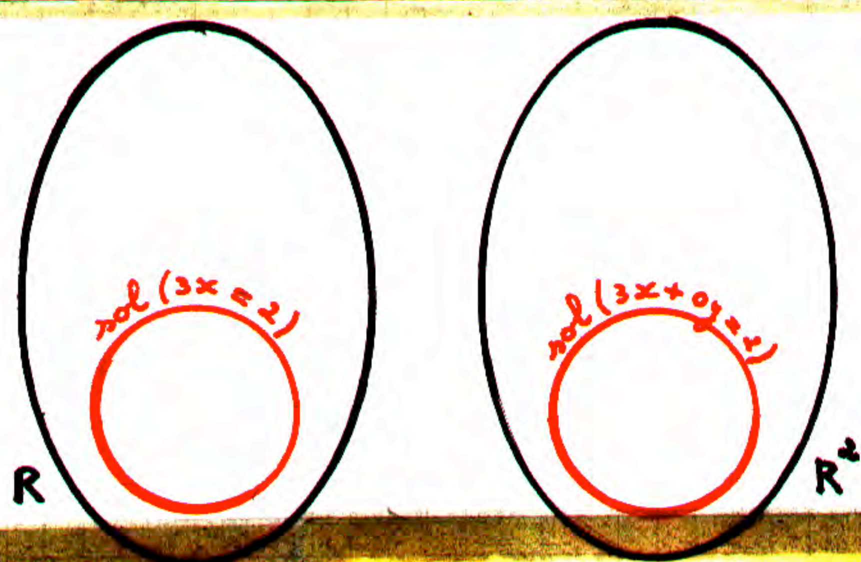
7. Calcule a sachant que $(1;2)$ est solution de $3x - ay = 2$

8. Calcule a et b sachant que $(0;1)$ est solution en (x,y) de

$$(a-b)(2x-y) - (a-2b)(x+y) = 5$$

Calcule x et y sachant que $(0;1)$ est solution en (a,b) de cette équation.

9.



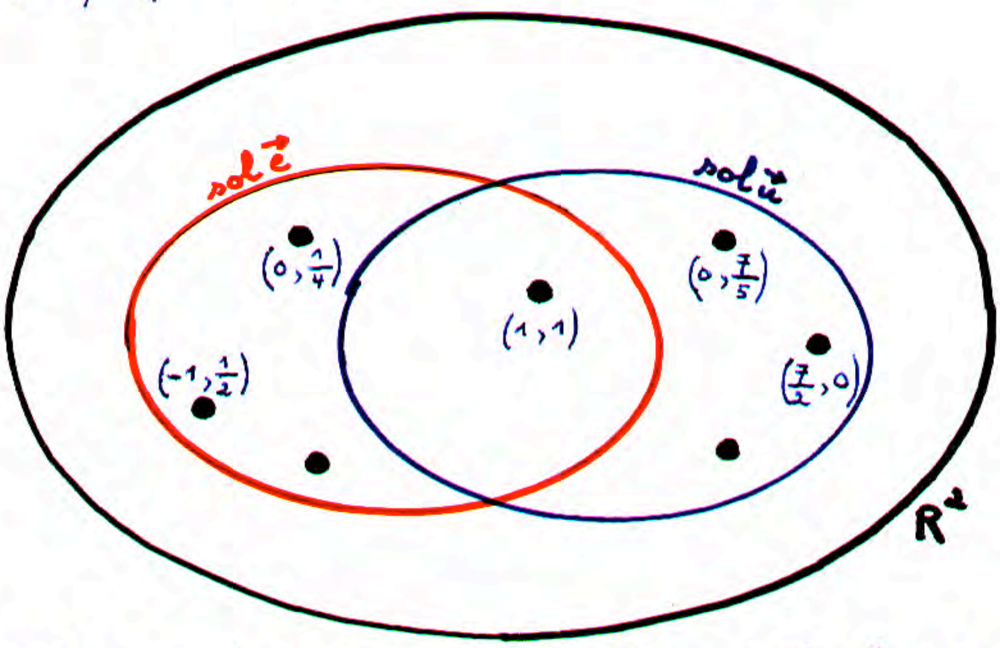
Contemple, justifie !

4 Résolution d'un ensemble de deux équations linéaires à deux inconnues

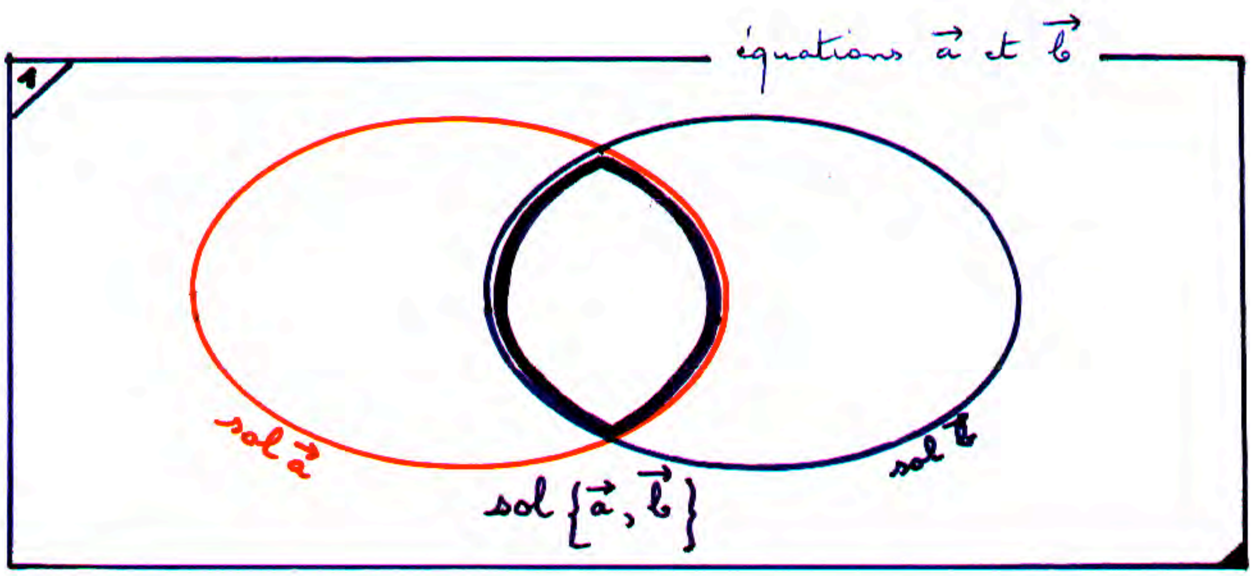
Voici les équations $\vec{e} = (3x - 4y = -1)$

$\vec{u} = (2x + 5y = 7)$

Dessine un diagramme de Venn de $\mathbb{R}^2$, sol $\vec{e}$, sol $\vec{u}$ et marques-y quelques éléments de sol $\vec{e}$ et de sol $\vec{u}$.



$(1,1)$ est une solution commune à $\vec{e}$ et à $\vec{u}$. On dit que $(1,1)$ est une <u>solution de l'ensemble $\{\vec{e},\vec{u}\}$</u> (ou encore, du système d'équations $\{\vec{e},\vec{u}\}$).

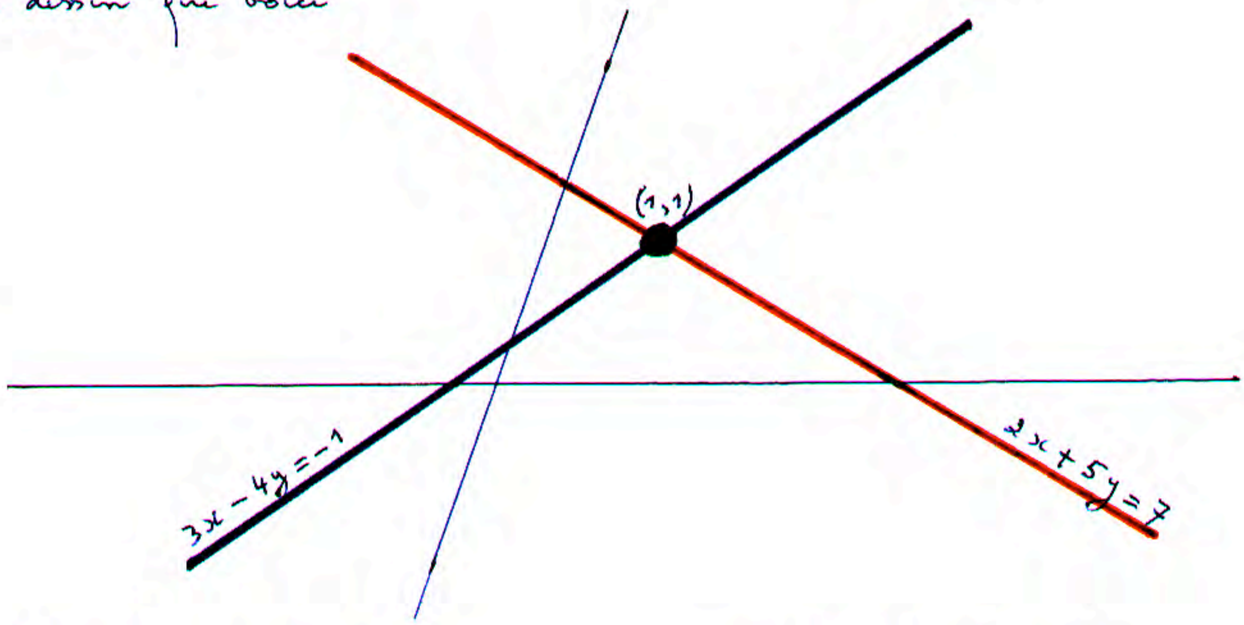


Revenons à l'exemple précédent.

L'ensemble $\{\vec{e}, \vec{u}\}$ admet-il d'autres solutions que $(1,1)$?

Le dessin que voici

rouge = bleu
bleu = rouge



te fournit la réponse : $\quad \text{sol}\{\vec{e}, \vec{u}\} = \{(1,1)\}$

Résoudre le système $\begin{cases} \vec{e} = (\ 3x - 2y = 12\ ) \\ \vec{u} = (-4x + 5y = 8\ ) \end{cases}$

en traçant les droites $3x - 2y = 12$ et $-4x + 5y = 8$

Le dessin t'apprendra que $\{\vec{e}, \vec{u}\}$ admet une seule solution.

Néanmoins il te sera très difficile – si ce n'est impossible – d'y lire la solution exacte.

Voici donc un procédé pour calculer $\text{sol}\{\vec{e}, \vec{u}\}$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Alors

$$(x,y) \in sol\{\vec{e},\vec{u}\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{r} 3x - 2y = 12 \\ -4x + 5y = 8 \end{array}}$$

$$\Updownarrow (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 12x - 8y = 48 \\ -12x + 15y = 24 \end{array}}$$

$$\Updownarrow (2)$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 7y = 72 \\ -12x + 15y = 24 \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{r} y = \frac{72}{7} \\ -12x + 15.\frac{72}{7} = 24 \end{array}} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{76}{7}, \frac{72}{7}\right)$$

Donc $\quad sol\{\vec{e},\vec{u}\} = \left\{\left(\frac{76}{7}, \frac{72}{7}\right)\right\}$

Justification:

(1) $\quad \forall a,b \in \mathbb{R} \,;\, \forall c \in \mathbb{R}_0 : \quad a = b \Leftrightarrow ac = bc$

(2) $\quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R} : \quad a = b$ et $c = d \Leftrightarrow a+c = b+d$ et $c = d$

Exercices

1. Résoudre

$$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x + 5y = 7 \\ x - 6y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 3y = 2 \\ 7x - 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 8y = 2 \\ -\frac{x}{4} + 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x + 13y = -10 \\ 27x - 14y = -82 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x - 5y = -\frac{2}{3} \\ -4x - y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 14x - 16y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0x + 7y = -14 \\ -2x + 0y = 5 \end{cases}$$

2. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$

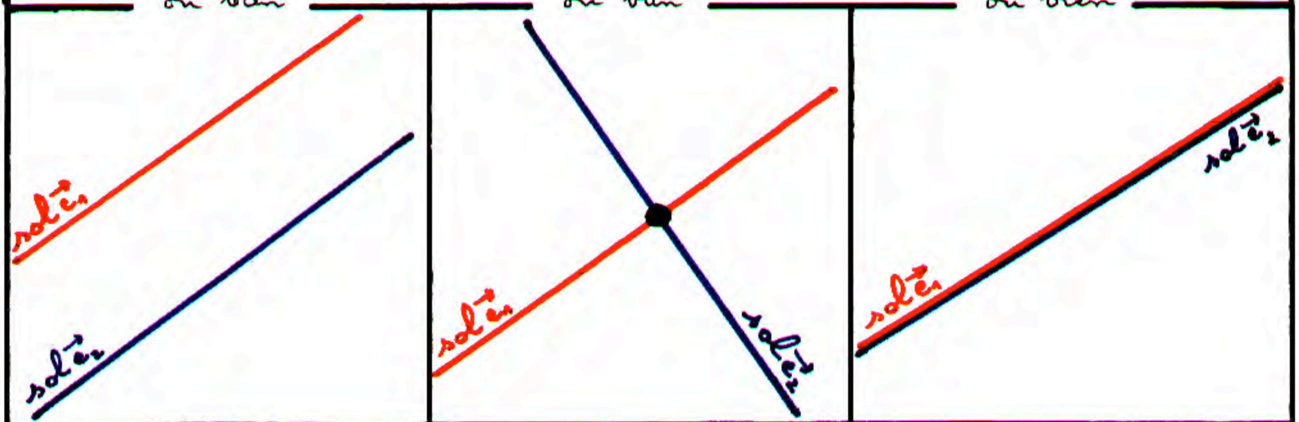
$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (a_1 x + b_1 y = c_1) \\ \vec{e}_2 = (a_2 x + b_2 y = c_2) \end{cases}$$

$\boxed{a_1 \neq 0 \text{ ou } b_1 \neq 0}$

et

$\boxed{a_2 \neq 0 \text{ ou } b_2 \neq 0}$

ou bien — ou bien — ou bien



$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \emptyset$	$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est un singleton	$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = sol\,\vec{e}_1 = sol\,\vec{e}_2$

3. $sol\,\{7x - 8y = 9\ ,\ 14x - 16y = 1\}$

$= sol\,\{14x - 16y = 18\ ,\ 14x - 16y = 1\} = \ \ldots$

4. $sol\,\left\{\dfrac{x}{140} - \dfrac{y}{210} = 1\ ,\ \dfrac{x}{250} - \dfrac{y}{350} = 0\right\}$

$= sol\,\{3x - 2y = 420,\ 7x - 5y = 0\} = \ \ldots$

5. Résous

$$\begin{cases} 0x + 0y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

6.

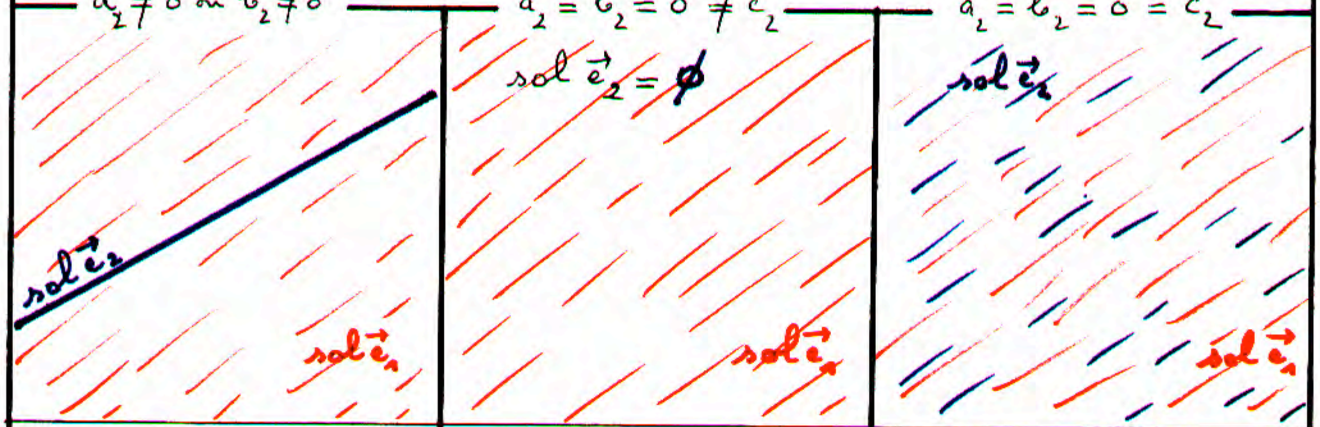
$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$

$\vec{e}_1 = (a_1 x + b_1 y = c_1)$
$\vec{e}_2 = (a_2 x + b_2 y = c_2)$

$\boxed{a_1 = 0 = b_1}$

- ou bien $c_1 \neq 0$ et $sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \emptyset$
- ou bien $c_1 = 0$

$a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$	$a_2 = b_2 = 0 \neq c_2$	$a_2 = b_2 = 0 = c_2$



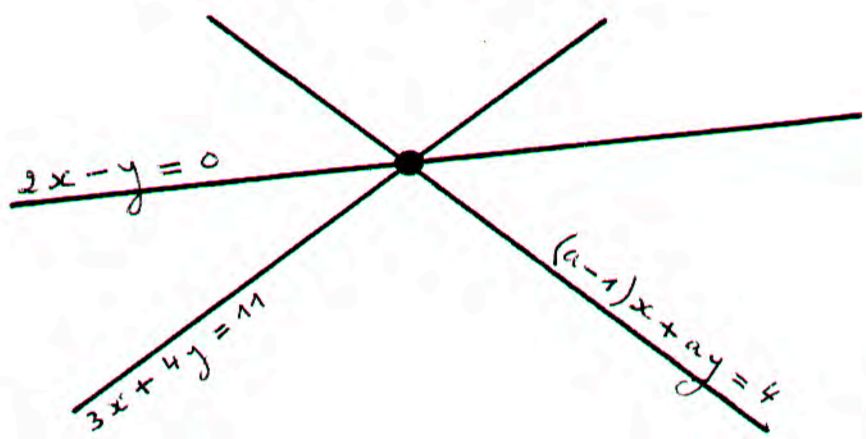
$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = sol\,\vec{e}_2$	$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \emptyset$	$sol\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$

7. Calcule a et b, sachant que $(2,-3)$ est solution de

$$\begin{cases} (a-4)x + (b-2)y = 26 \\ (5-a)x + (5+b)y = -7 \end{cases}$$

8.



Calcule a

9. Résous rapidement

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 3x + y = 0 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 8x + 2y = 12 \\ x + 0y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,05x - 0,6y = 2 \\ 5x - 60y = 200 \\ 0,5x - 6y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0,2x - 0,5y = 2 \\ 0,8x + 0,1y = -1 \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 20 \end{cases}$$

10. Résous

$$\begin{cases} 2,1x - 4y = 3,5 \\ -6,8x - 0,7y = 22 \\ 2,6x + 8,7y = -29 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ -\frac{x}{10} + \frac{y}{20} = -1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

5 Problèmes

La solution de la plupart des problèmes qui suivent s'obtient par une "mise en équation".

Ainsi, pour l'EX 4, en désignant la largeur et la longueur d'un rectangle répondant aux conditions requises respectivement par x et y, on a

$$\begin{cases} 2(x+y) = 45 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

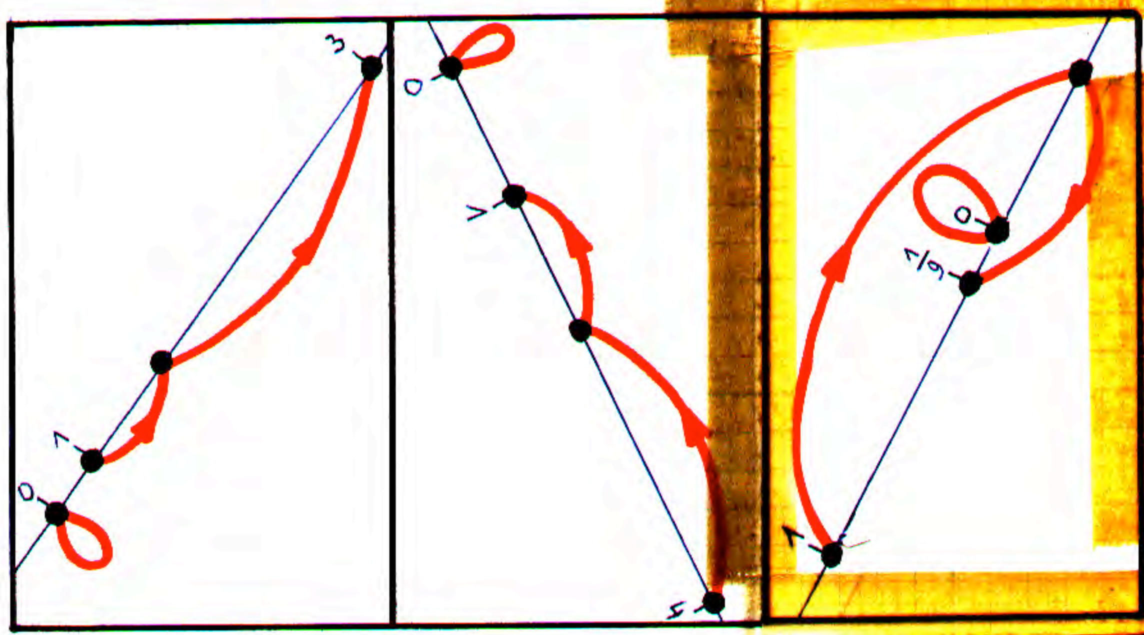
Reste à résoudre l'ensemble de ces équations.

- La recherche des solutions d'un problème peut conduire à la résolution d'une équation ou d'une inéquation, d'un ensemble d'équations ou d'inéquations, à une ou plusieurs inconnues.
- Certains problèmes peuvent avoir une solution, un nombre fini, une infinité ... ou pas de solutions !

1. Nombres surpassant leur double de 0,75 ?
2. Si l'on additionne 3 au quart d'un nombre, l'on obtient son opposé. Calcule ce(s) nombre(s).
3. La somme de ces nombres égale 1020 et leur différence, 38. Calcule ces nombres.
4. Le périmètre d'un rectangle mesure 45 cm et le rapport de ses dimensions est $\frac{3}{4}$. Largeur et longueur du rectangle ?
5. L'aire d'un rectangle mesure 192 cm^2 et le rapport de ses dimensions est $\frac{3}{4}$. Périmètre du rectangle ?

6. Sophie achète 2 kg de pommes et 1,5 kg d'oranges et paie au total 117 F. Le lendemain elle achète, au même prix, 1,5 kg de pommes et 2,5 kg d'oranges et paie en tout 129 F. Prix d'un kilo de pommes et d'un kilo d'oranges ?

7.



Voici quelques flèches de trois homothéties. Rapport de chacune d'elles ?

8. <u>Si</u> h est une homothétie et
le rapport de h^2 égale r
<u>Alors</u> quel est le rapport de h ?

9. Quels sont les réels égaux à leur cube ?

10. Réels égaux à leur quatrième puissance ?

11. Calculer les réels égaux au triple de leur carré.

12. Couples d'entiers consécutifs dont la somme égale la différence des carrés ?
Définis l'ensemble de ces couples en compréhension.

13. Mêmes questions, si l'on remplace "carrés" par "cubes".

14. Pour monter cette côte, ce cycliste met 5 minutes de plus que pour la descendre. Longueur de la côte, sachant qu'il monte à 12 km/h et descend à 36 km/h ?

15.

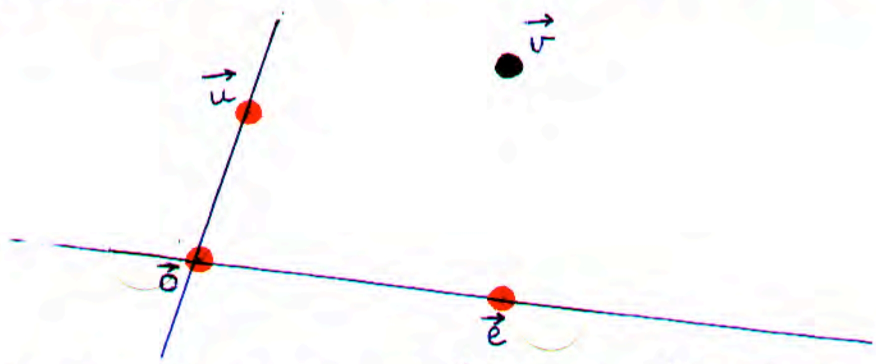
Calcule l'heure <u>exacte</u> marquée par cette montre.

16. Les dimensions de ce rectangle sont 63 et 175.
Aire du carré de même périmètre ?
Périmètre du carré de même aire ?

17. Mêmes questions pour un rectangle de dimensions a et b. $(a, b \in \mathbb{R}_0^+)$

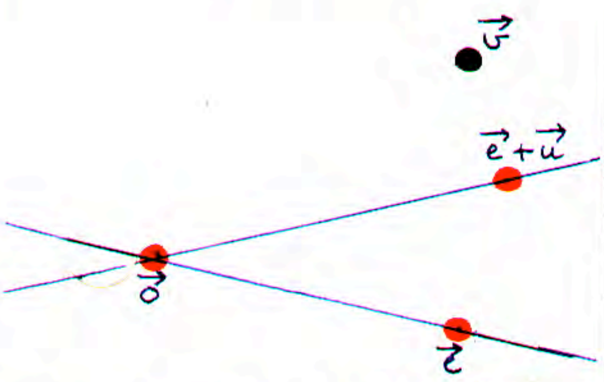
18. Cet automobiliste va du village A au village B à 70 km/h de moyenne. Il s'arrête en B pendant 50 minutes et revient en A à 80 km/h de moyenne. Il s'est ainsi absenté pendant 2h 30 min. Distance de A à B ?

19. <u>Si</u> $\left(\frac{3}{4} ; \frac{3}{2}\right)$ est la coordonnée de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e} ; \vec{u})$

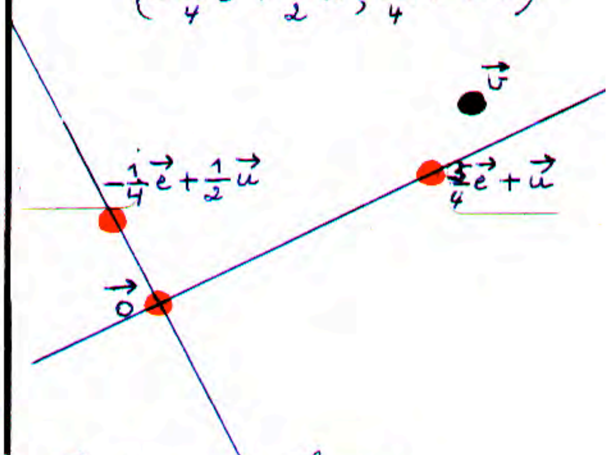


<u>Alors</u> <u>évalue</u> immédiatement la coordonnée de $\vec{v}$ dans les bases

$(\vec{e} ; \vec{e} + \vec{u})$



$\left(-\frac{1}{4}\vec{e} + \frac{1}{2}\vec{u} ; \frac{5}{4}\vec{e} + \vec{u}\right)$



<u>Calcule</u> ensuite la coordonnée de $\vec{v}$ dans ces bases.

20. <u>Si</u> (r_1, r_2) est la coordonnée de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
<u>Alors</u> calcule la coordonnée de $\vec{v}$ dans la base $(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 , b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$

21. 3 9 15 21 27 33 39 … …
est une progression arithmétique de raison 6 ; elle comprend 35 termes. Calcule le 21^e terme, le dernier terme.

22. Voici la progression arithmétique dont le premier terme est a et la raison r ; elle comprend n termes. $(a, r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0)$

$$a \quad a+r \quad a+2r \quad \dots \quad \dots \quad a+(n-3)r \quad a+(n-2)r \quad a+(n-1)r$$

$2a+(n-1)r$
$2a+(n-1)r$
$2a+(n-1)r$

La somme des termes de cette progression $= \frac{n}{2}(2a+(n-1)r)$
Justifie !

23. On t'informe que la somme des termes de la progression arithmétique
$$-a \quad -a+r \quad -a+2r \quad \dots \quad \dots \quad -a+(n-1)r \qquad (a, r \in \mathbb{R}_0^+ ; n \in \mathbb{N}_0)$$
égale 0. Calcule de nombreuses valeurs pour a, r et n.

24. Une école veut se procurer un très grand nombre de mètres de tentures. Deux magasins proposent la qualité recherchée, au prix de 250 F le m., mais en offrant des remises suivant des modalités différentes. Le premier offre une réduction progressive : 10% sur les 10 premiers mètres, 12,5% sur les 10 mètres suivants, 15% sur les m. suivants, 17,5% …
Le deuxième offre 25% sur tout achat.
Pour quel métrage
- est-il indifférent d'acheter dans l'un ou l'autre magasin ?
- est-il avantageux d'acheter dans le premier magasin ?