

# 13

## Programmation linéaire

### Le bricolage de la famille Bosmans

Pendant les week-ends, la famille Bosmans fabrique des marionnettes et des animaux en bois.

Le père est spécialisé dans la sculpture et la maman, dans la peinture. Leur fils assemble les animaux et ses deux petites sœurs, les marionnettes.

Les parents vendent ces objets et souhaitent réaliser un bénéfice maximum. Voici les données du problème.

Chaque mois, le père sculpte au plus 30 marionnettes ou 30 animaux. La maman peint au plus 24 marionnettes ou 48 animaux. Le fils assemble au plus 15 animaux et ses sœurs, au plus 20 marionnettes.

	PRODUCTION MENSUELLE MAXIMUM			
	Sculpture	Peinture	Ass. marion.	Ass. animaux
Marionnettes	30 ou	24 ou	20	-
Animaux	30	48	-	15

La vente d'une marionnette ou d'un animal réalise des bénéfices respectifs de 500 et 300 F.

Combien de marionnettes et d'animaux la famille Bosmans doit-elle fabriquer mensuellement de manière à réaliser un bénéfice maximum ?

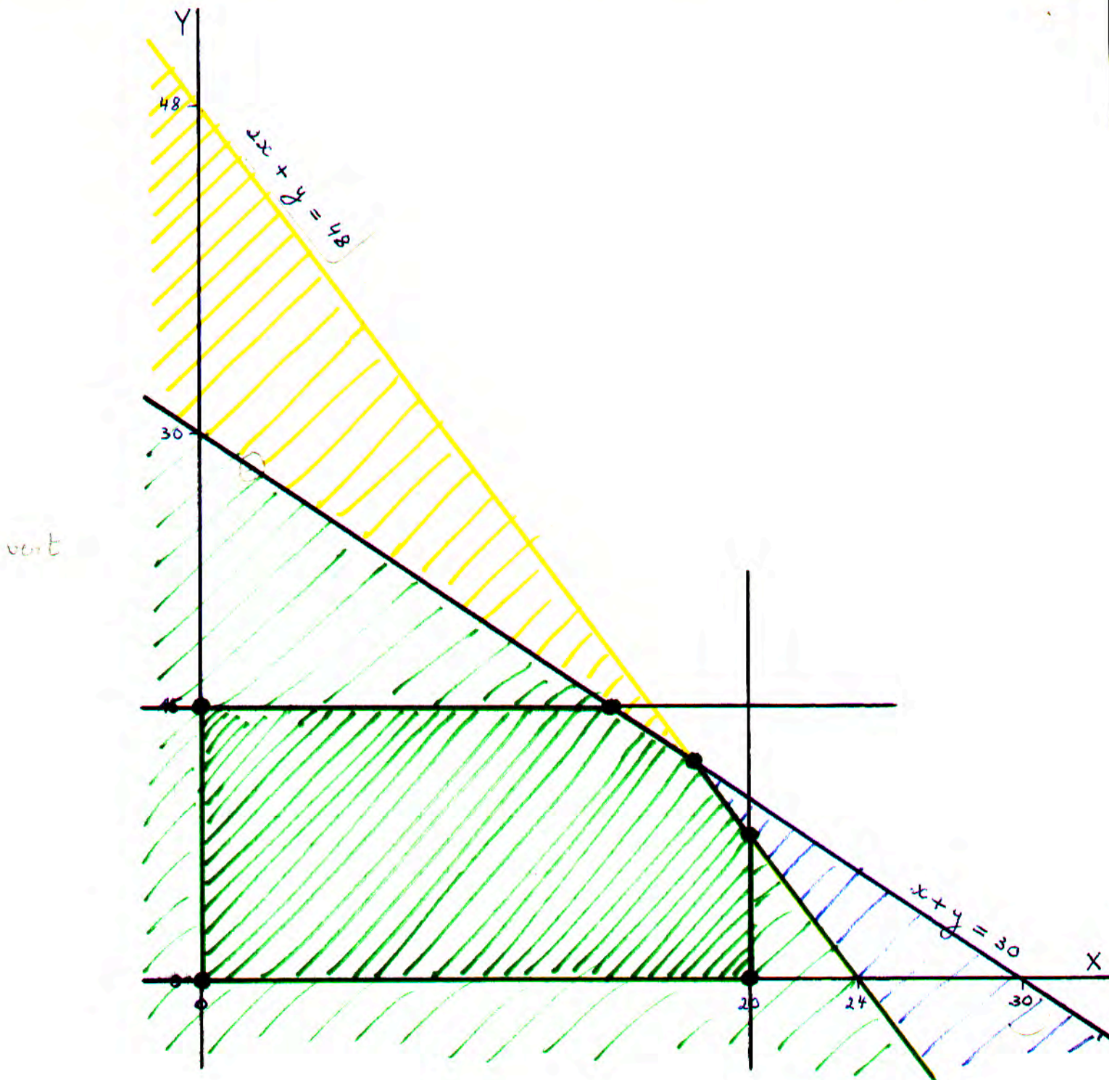
Appellons  $x$  et  $y$  les nombres respectifs de marionnettes et d'animaux fabriqués mensuellement.

Les données du problème se traduisent par les inéquations

$$S \begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + y \leq 30 \\ 2x + y \leq 48 \end{cases}$$

sans oublier que  $x$  et  $y$  sont des nombres naturels !





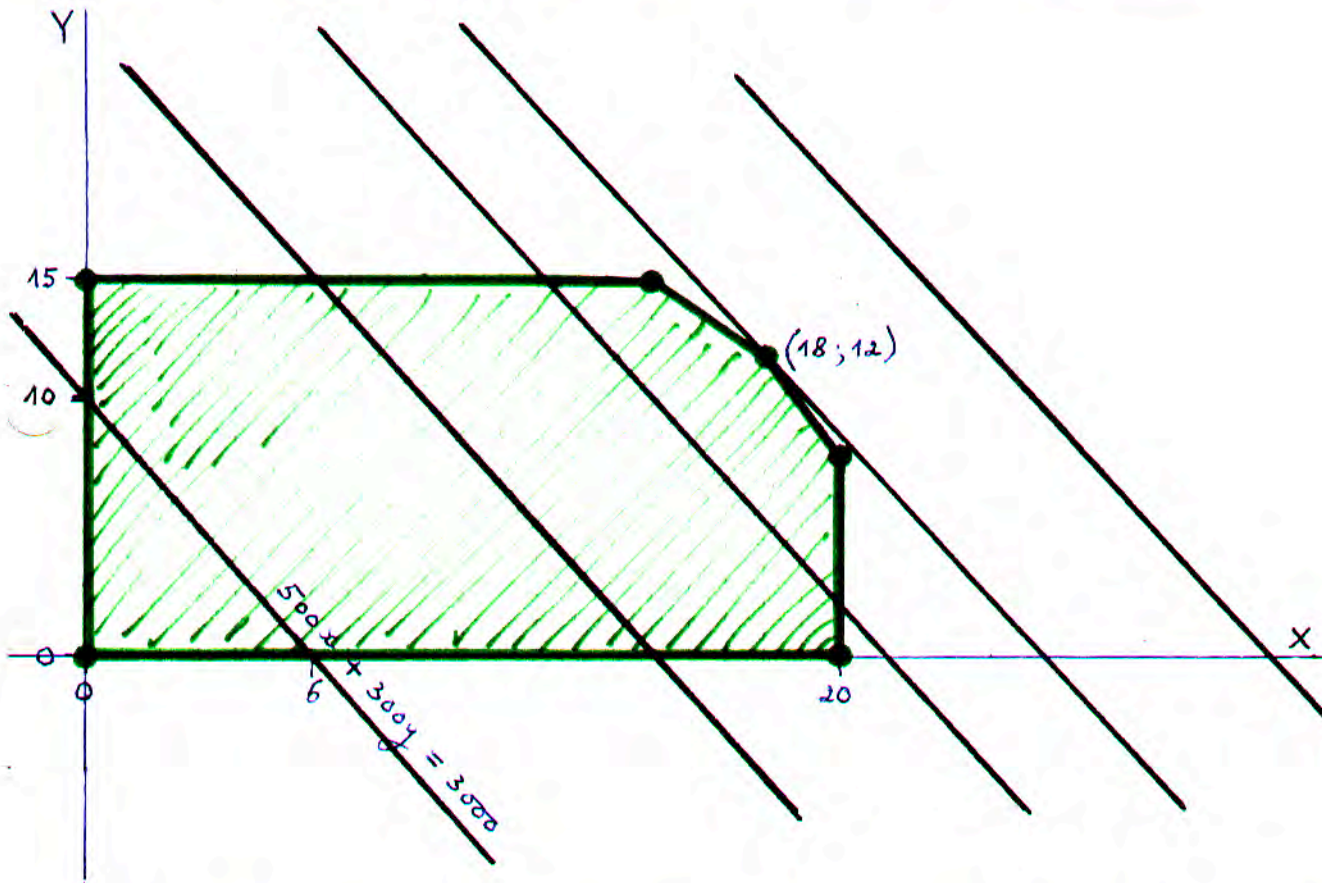
- Calcule les coordonnées des sommets de l'hexagone vert formé
- ...
- Fournis plusieurs solutions de  $S$
- $(20; 6)$ ,  $(18; 12)$ ,  $(15; 12)$ ,  $(12; 14)$ , ...
- Quel est l'ensemble des solutions de  $S$  ?
- L'ensemble des points à coordonnées entières appartenant à l'hexagone vert..

Quels sont les éléments de  $S$  qui rendent le bénéfice maximum ?

$$b(x, y) = 500x + 300y$$

maximum ?

Dessignons quelques droites équilibrées... avec le translateur.



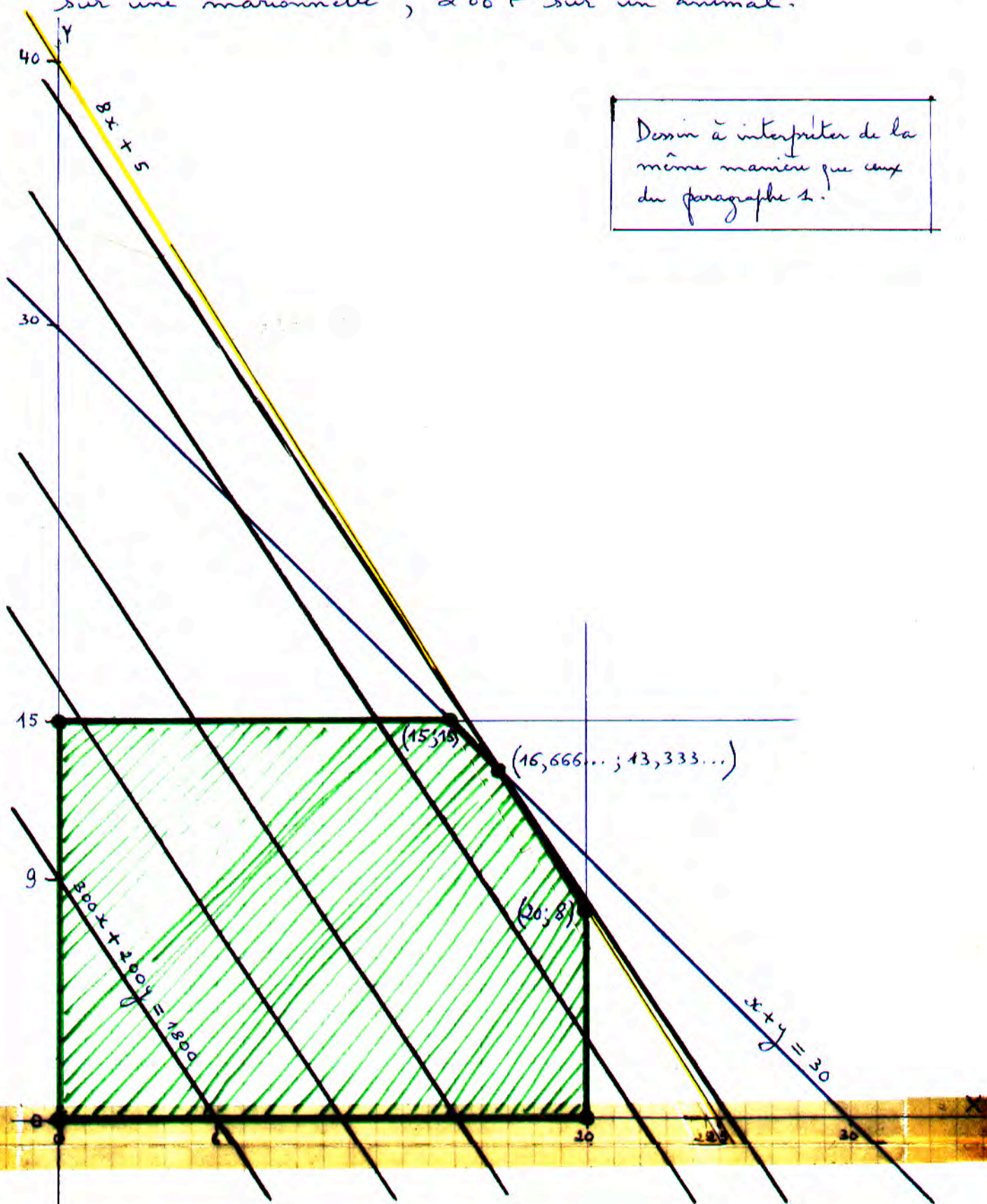
La fabrication mensuelle de 18 marionnettes et de 12 animaux rend le bénéfice maximum.  
Calcule-le !



## 2. Le bricolage de la famille Coppinolle

La famille Y, amie de la famille X, l'a imitée. Dans la fabrication des jouets, elle parvient à respecter les mêmes normes que la famille X, sauf la maman qui, plus minutieuse, peut au maximum 40 animaux par mois, bien qu'elle peigne 25 marionnettes (au plus) par mois.

La famille Y se contente de bénéfices moins importants que la famille X sur la vente des objets fabriqués : 300 F sur une marionnette, 200 F sur un animal.

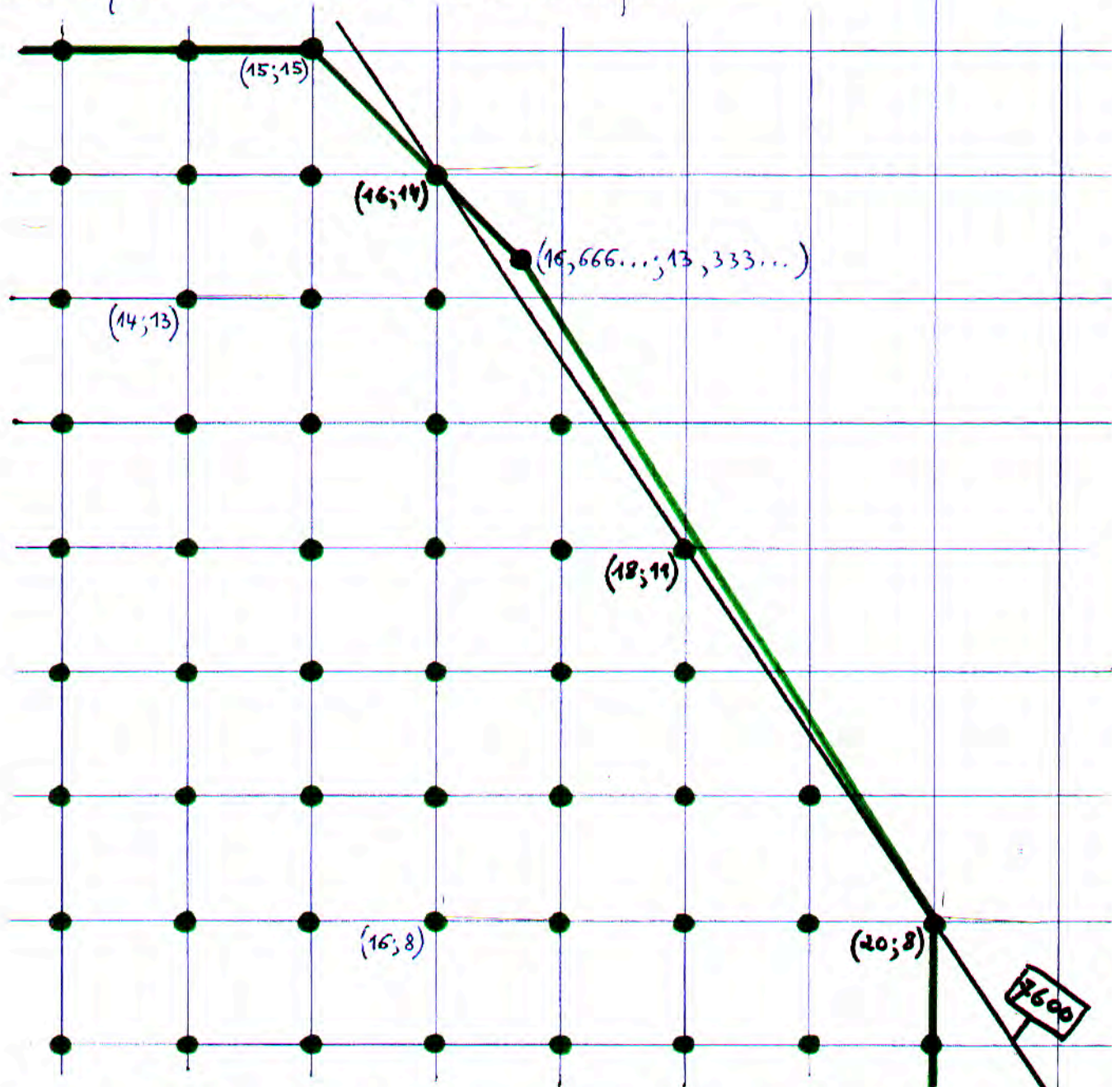




La droite de bénéfice maximum rencontre l'ensemble des solutions au point  $(16,666\dots; 13,333\dots)$ . Ce point à coordonnées non entières ne fournit pas une réponse au problème.

Reprenons une partie du dessin en l'agrandissant et en mettant en évidence quelques solutions du problème.

Les repères sur X et Y sont métriques.



Les candidats au bénéfice maximum se manifestent immédiatement.

La fabrication mensuelle

de 16 marionnettes et de 14 animaux

ou de 18 marionnettes et de 11 animaux

ou de 20 marionnettes et de 8 animaux

procure le bénéfice maximum.

### 3 Exercices

1. Pour quelles valeurs de  $x, y$

$$z = 3x - y \quad \text{est-il maximum,}$$

s'il faut que

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 6 \quad ?$$

2. Maximiser  $z = 4x + 5y$   
en respectant les contraintes :

$$2x + 4y \leq 12$$

$$4x + 2y \leq 12$$

$$4x + 4y \leq 14$$

avec  $x, y \geq 0$

3. Un épicier vend des corbeilles de fruits sélectionnés

- les unes à 80 F, contenant 5 poires, 2 oranges et 1 pomme
- les autres à 60 F, contenant 3 poires, 3 oranges et 3 pommes

Il a constaté qu'il peut offrir indifféremment l'un ou l'autre assortiment à sa clientèle.

Ce jour-là, il dispose de

30 poires

24 oranges

18 pommes

Comment doit-il les disposer dans les corbeilles pour réaliser la recette maximale ?

4. Dans cette usine, on fabrique des miniautos et des minimotos. Pour construire ces jouets, on utilise deux machines : la machine A qui en fabrique les pièces et la machine B qui les assemble.

A doit fonctionner pendant 4 heures pour fabriquer les



pièces d'une auto et pendant 1 heure pour fabriquer celles d'une moto. B assemble une auto en 2 heures et une moto en 2,5 heures.

Chaque jour, la machine A est mise en service au maximum pendant 8 heures et B au plus pendant 12 heures.

- Consigne toutes ces données en un tableau.
  - Le bénéfice réalisé sur la vente d'une auto est de 250 F ; sur la vente d'une moto, de 150 F. Combien d'autos et de motos doit-on fabriquer quotidiennement de manière à réaliser un bénéfice maximum ?
5. Dans cette usine on fabrique des marmites à pression et des cafetières automatiques. Pour chacun de ces appareils, les principales opérations d'usinage sont
- l'estampage
  - la reprise
  - l'assemblage.

Celles-ci font l'objet de certaines limitations.

Ainsi, pour la prochaine semaine, la capacité de fabrication pour chaque article, considérée comme fabriquée seul, s'établit en moyenne comme suit :

	Marmites	Cafetières
Estampage	25.000	35.000
Reprise	32.000	16.000
Assemblage marmites	22.500	—
Assemblage cafetières	—	15.000



Le bénéfice réalisé sur la vente d'une marmite est de 150 F; celui réalisé sur la vente d'une cafetière, de 125 F.

Quelles quantités de marmites et de cafetières doit-on produire de manière à réaliser un bénéfice maximum ?

(Nous supposons que les carnets de commande sont pleins et, qu'au fur et à mesure de leur production, les appareils sont vendus).<sup>1</sup>

6. Programme de production d'une raffinerie.

Une raffinerie peut traiter deux pétroles bruts.

- le premier, qui provient du Sahara et sera appelé brut n°1, lui revient à 1000 F/t
- le second, qui provient du Moyen-Orient et sera appelé brut n°2, lui revient à 900 F/t

Ces prix comprennent uniquement l'achat du brut, le coût de son transport et les frais proportionnels des différentes opérations de raffinage qui permettent de le transformer intégralement en

essence  
 gasoil  
 fuel-oil

Les rendements des deux pétroles bruts traités sont différents et précisés par le tableau ci-après, qui explicite les quantités produites à partir de 100 t de chacune des matières premières:

<sup>1</sup> Ce problème est extrait de l'ouvrage "Initiation à la Recherche opérationnelle", de A. KAUFMANN et R. FAURE, DUNOD, Paris 1968.

Productions	Brut n°1	Brut n°2
Essence	25	25
Gasoil	40	25
Fuel-oil	35	50
Total	100	100

Cette raffinerie peut vendre au cours d'une année

1.250.000 t d'essence

1.350.000 t de gasoil

1.800.000 t de fuel-oil

Quelle quantité<sup>1</sup> de chacun des bruts doit-elle mettre en œuvre pour que sa dépense totale soit minimale ?<sup>1</sup>

7. Constitution de deux carburants par mélange de 4 constituants.

Une raffinerie prépare 2 carburants pour automobiles en mélangeant 4 constituants : l'isopentane, la gasoline, le reformat et le platformat.

(platformat = base à carburant obtenue par l'opération de "platforming", traitement sur catalyseur au platine, en présence d'hydrogène  
reformat = base obtenue par l'opération de "reforming", traitement sous pression et à haute température.)

Constituants	Carburant n°1 (%)	Carburant n°2 (%)
isopentane	20	10
gasoline	30	10
reformat	30	60
platformat	20	20

<sup>1</sup> Ce problème, un peu aménagé, et le suivant, sont extraits de l'ouvrage "Programmation linéaire appliquée", de H. MAURIN, Editions Technip, Paris



Cette raffinerie dispose de  $9.000 \text{ m}^3$  d'isopentane,  
de  $14.000 \text{ m}^3$  de platformat.

Par contre, les quantités de gasoline et de reformat ne sont pas limitées. Au contraire, les stocks de ces 2 constituants ayant tendance à augmenter, la raffinerie doit nécessairement utiliser

au moins  $18.000 \text{ m}^3$  de reformat  
au moins  $6.000 \text{ m}^3$  de gasoline.

Son gain est de

$60 \text{ F/m}^3$  pour le carburant n° 1

$50 \text{ F/m}^3$  pour le carburant n° 2

Quels mélanges doit-elle réaliser pour obtenir le bénéfice maximum ?