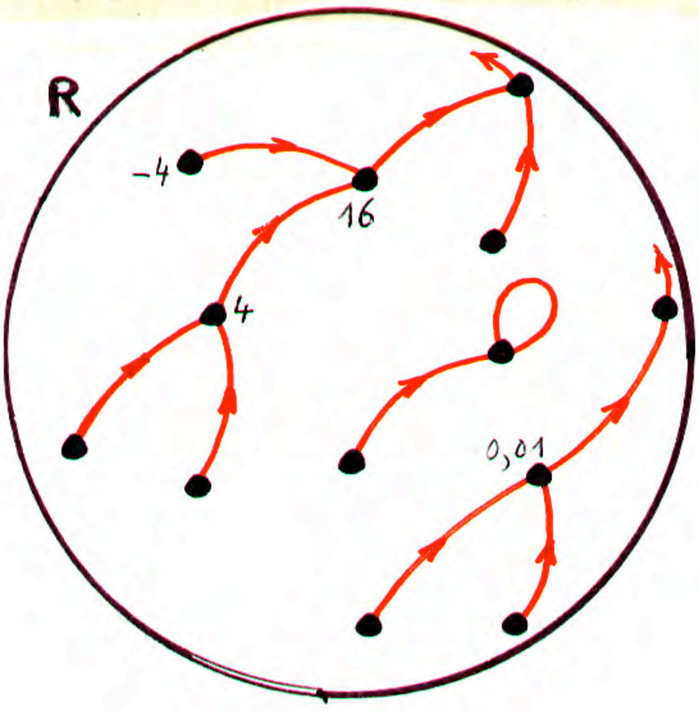
2

Racine carrée

1 Définition

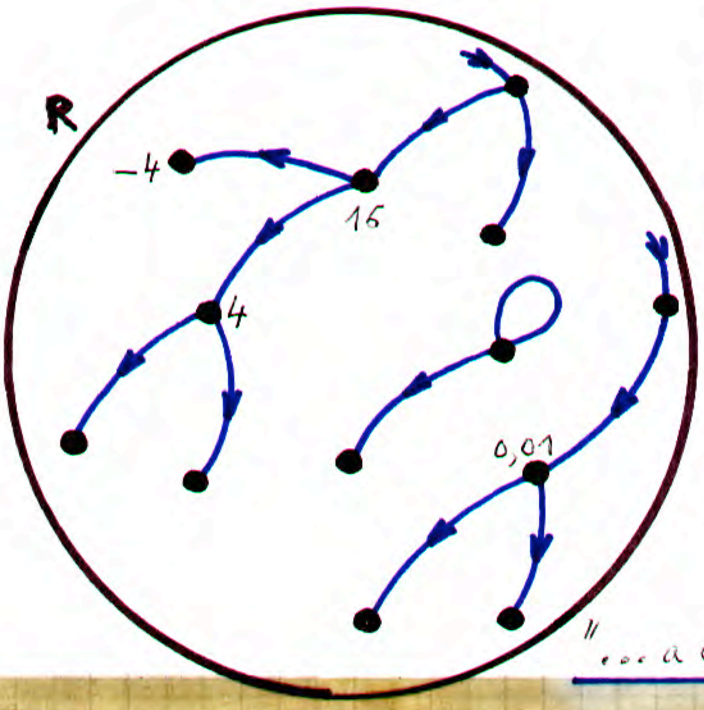
Voici un graphe partiel de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$



$\boxed{\operatorname{im} f = \mathbb{R}^+}$

$x \longmapsto x^2$

... et de sa réciproque



$\boxed{\operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}^+}$

"... a comme racine carrée ..."

La relation "... a comme racine carrée ..." est la réciproque de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$

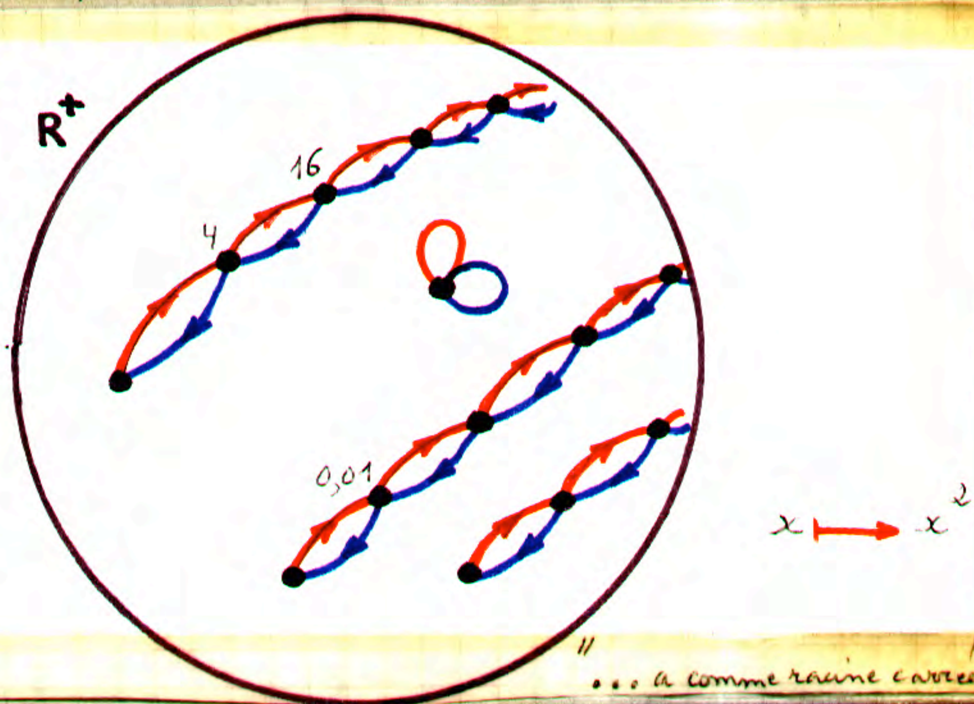
$r \in \mathbb{R}^+ ; a \in \mathbb{R}$

a est racine carrée de r **ssi** $a^2 = r$

Exercices

1. Les nombres 4 et -4 sont les racines carrées de 16.
2. Marque des nombres compatibles avec les graphes ci-dessus.

Voici un graphe partiel de la fonction $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$ et de sa réciproque



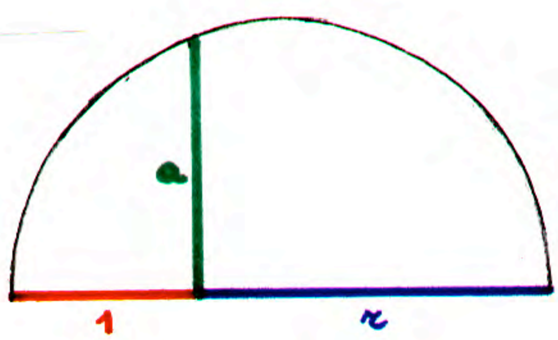
" ... a comme racine carrée ... "

1 $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$ est une permutation de $\mathbb{R}^+$

1) □ Tout réel positif r est carré d'un réel positif.

* mm 3 démontre :

avec repères métriques



$a^2 = r$

2) □ Tout réel positif est carré d'un seul réel positif.

* Pour tous réels positifs

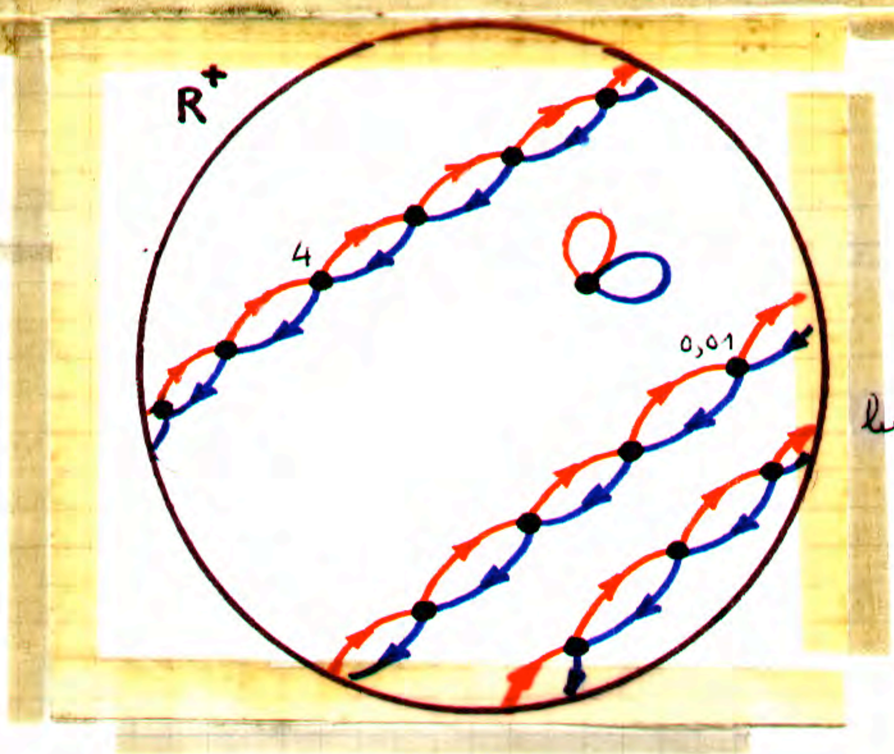
$$a < b \implies a^2 < b^2$$

D'une manière équivalente :

1 $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto$ racine carrée positive de x est une permutation de $\mathbb{R}^+$

et aussi

Tout réel positif r admet une racine carrée positive UNIQUE notée $\sqrt{r}$.



les permutations de $\mathbb{R}^+$

$x \longmapsto x^2$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

Exercices

1. Marque des nombres compatibles avec le graphe ci-dessus.
2. Calcule ou évalue

$\sqrt{9}$	$\sqrt{0,0001}$	$\sqrt{\frac{16}{25}}$
$\sqrt{0}$	$\sqrt{0,0000001}$	
$\sqrt{5}$	$\sqrt{10^8}$	$\sqrt{\frac{324}{225}}$
$\sqrt{625.000.000}$	$\sqrt{2^{-6}}$	$\sqrt{3^2}$
$\sqrt{62.500.000}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{(-3)^2}$

3. Voici 

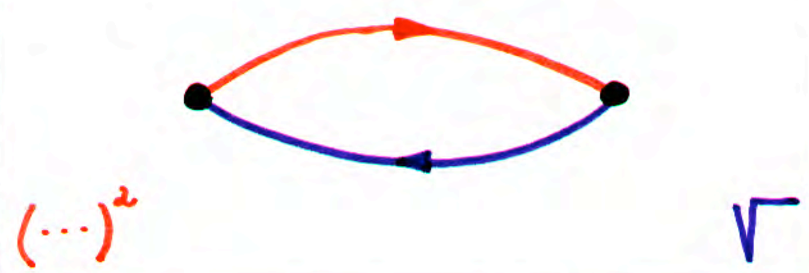
Construis, avec la règle et le compas, un segment de longueur $\sqrt{5}$.
Evalue $\sqrt{5}$.

4. $\forall a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} =$

$\forall a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} =$

5. $\forall a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} =$

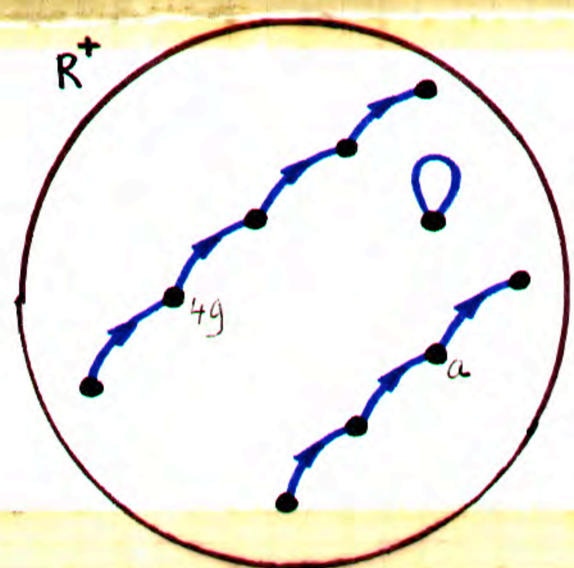
6. En $\mathbb{R}^+$



$a = \sqrt{r}$ ssi $a^2 = r$

7. En $\mathbb{R}^+$: $(\sqrt{r})^2 =$ $\sqrt{a^2} =$

8.



$x \longmapsto \sqrt{x}$

Marque des nombres compatibles avec ce graphe.

9. Points fixes de la permutation $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ ; x \longmapsto \sqrt{x}$?

10. En $\mathbb{R}$: 2 et -2 sont les racines carrées de 4

$\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont les racines carrées de 3

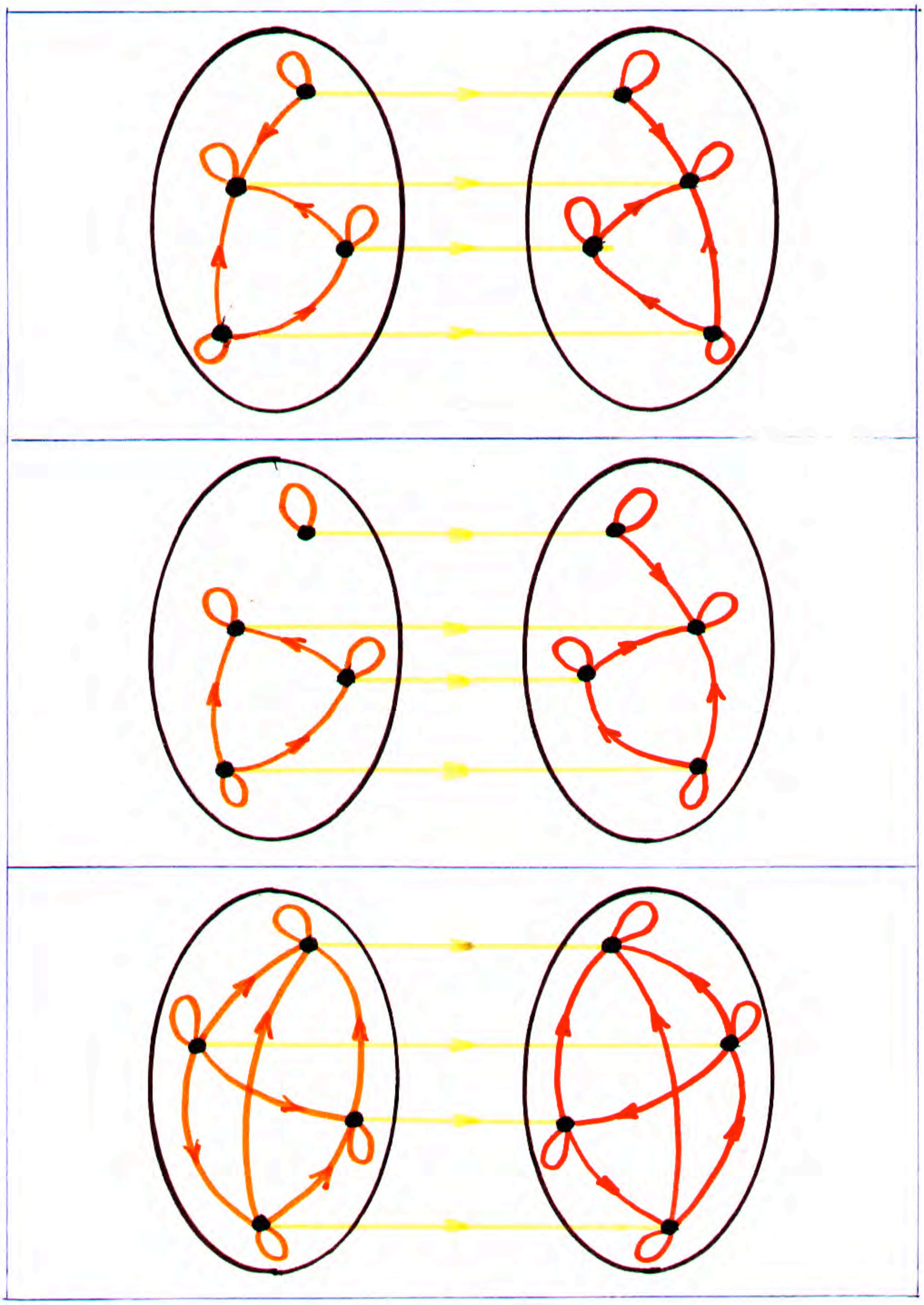
$\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$ sont les racines carrées de $r \in \mathbb{R}^+$

11. En $\mathbb{R}$:

tout réel strictement positif admet exactement <u>deux</u> racines carrées (opposées).
zéro admet une racine carré <u>unique</u> (nulle).
les réels strictement négatifs n'ont <u>pas</u> de racine carré.

2 Réciproque d'une bijection croissante, d'une bijection décroissante.

EX 1 Voici trois bijections croissantes entre ordonnés.
Vérifie qu'il s'agit bien d'ordonnés ... et que ces bijections sont croissantes. Relis éventuellement [mm2, p. 30].



EX Examine si les réciproques de ces bijections croissantes sont croissantes, décroissantes.

EX 2 $\mathbb{R}, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}, \leqslant : x \longmapsto 3x + 4$ est une bijection croissante. Justifie.
Calcule sa bijection réciproque. Est-elle croissante, décroissante ?

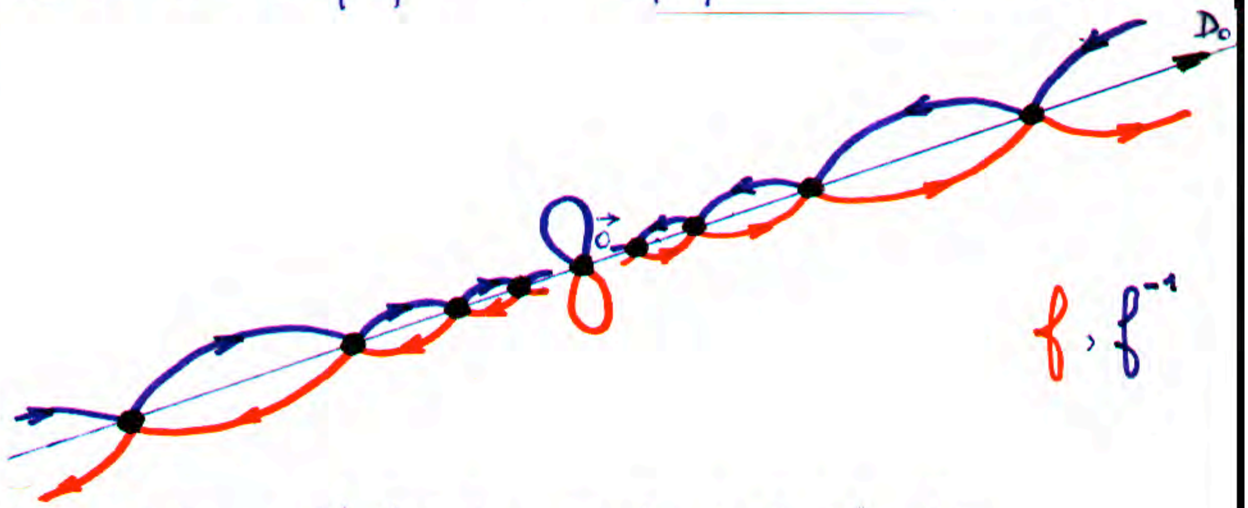
EX 3 Les bijections

$$\mathbb{R}, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}, \leqslant : x \longmapsto 2x - 7$$
$$\mathbb{R}, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}, \leqslant : x \longmapsto -3x + 1$$
$$\mathbb{R}, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}, \geqslant : x \longmapsto -3x + 1$$

sont-elles croissantes, décroissantes ?

(Vérifie d'abord que ces fonctions sont des bijections)
Calcule leur réciproque. Ces réciproques sont-elles croissantes, décroissantes ?

EX 5

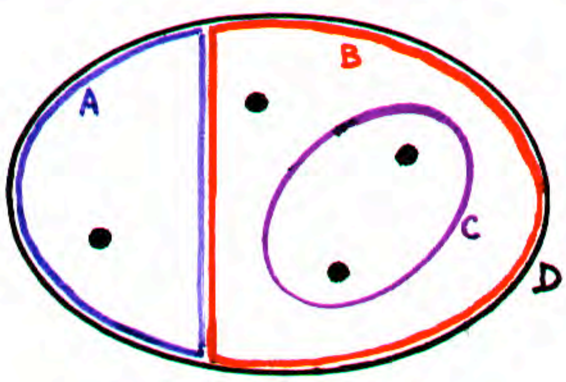


Voici quelques flèches du graphe de la fonction

$$f : D_0, \leqslant \longrightarrow D_0, \leqslant : \vec{x} \longmapsto 2\vec{x}$$

C'est une bijection. Pourquoi ?
Calcule f^{-1}. f, f^{-1} sont-elles croissantes, décroissantes ?

EX

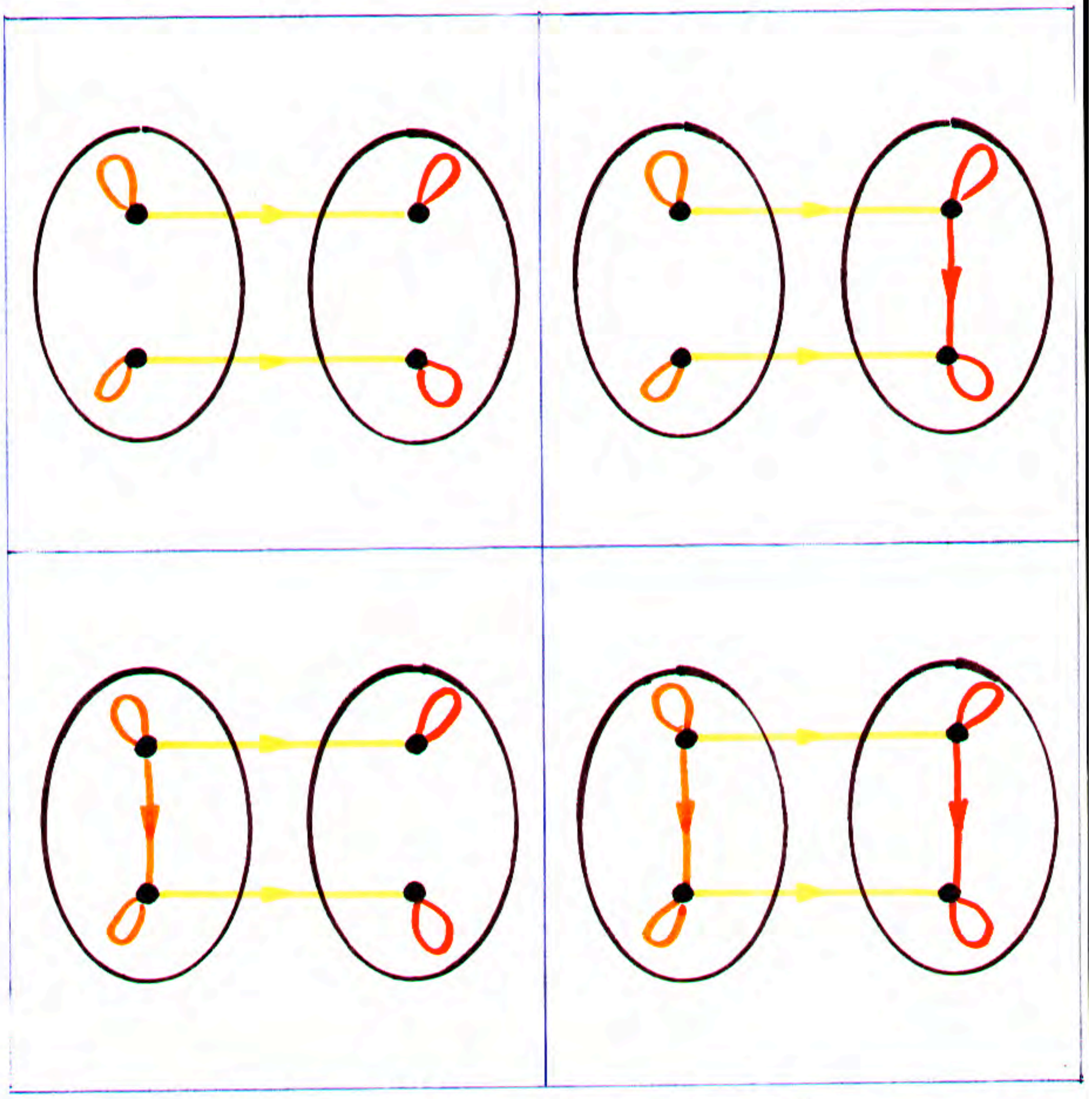


Dessine un graphe de la fonction

$$f : \{A, B, C, D\}, \subset \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \leqslant : X \longmapsto \# X$$

et de ces ordonnés.
Les bijections f et f^{-1} sont-elles croissantes, décroissantes ?

EX 6



Examine si ces bijections entre ordonnés, ainsi que leur réciproque, sont croissantes ou non.

EX 7 Les EX précédents ne te suggèrent-ils pas une réponse à la question :

La réciproque d'une bijection croissante est-elle croissante ?

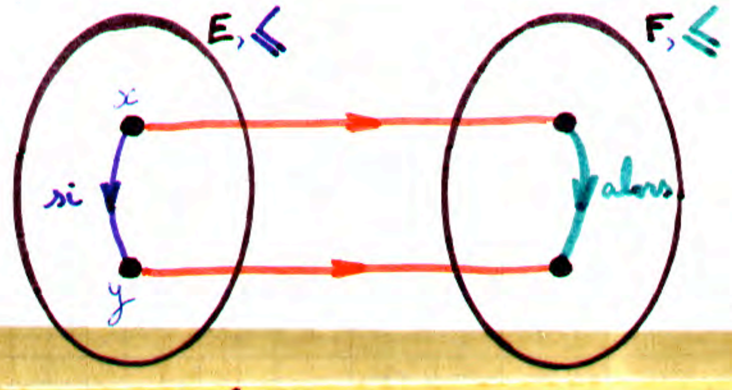
Suggestion : rappelle-toi qu'il existe des ordres totaux ou non.

Réponse partielle à l'EX 7 :

2 En ordonnés totaux :
la réciproque de toute bijection croissante est croissante.

Voici la bijection croissante $f : E, \leqslant \longrightarrow F, \leqslant$ entre ordonnés totaux.

$\forall x, y \in E$:

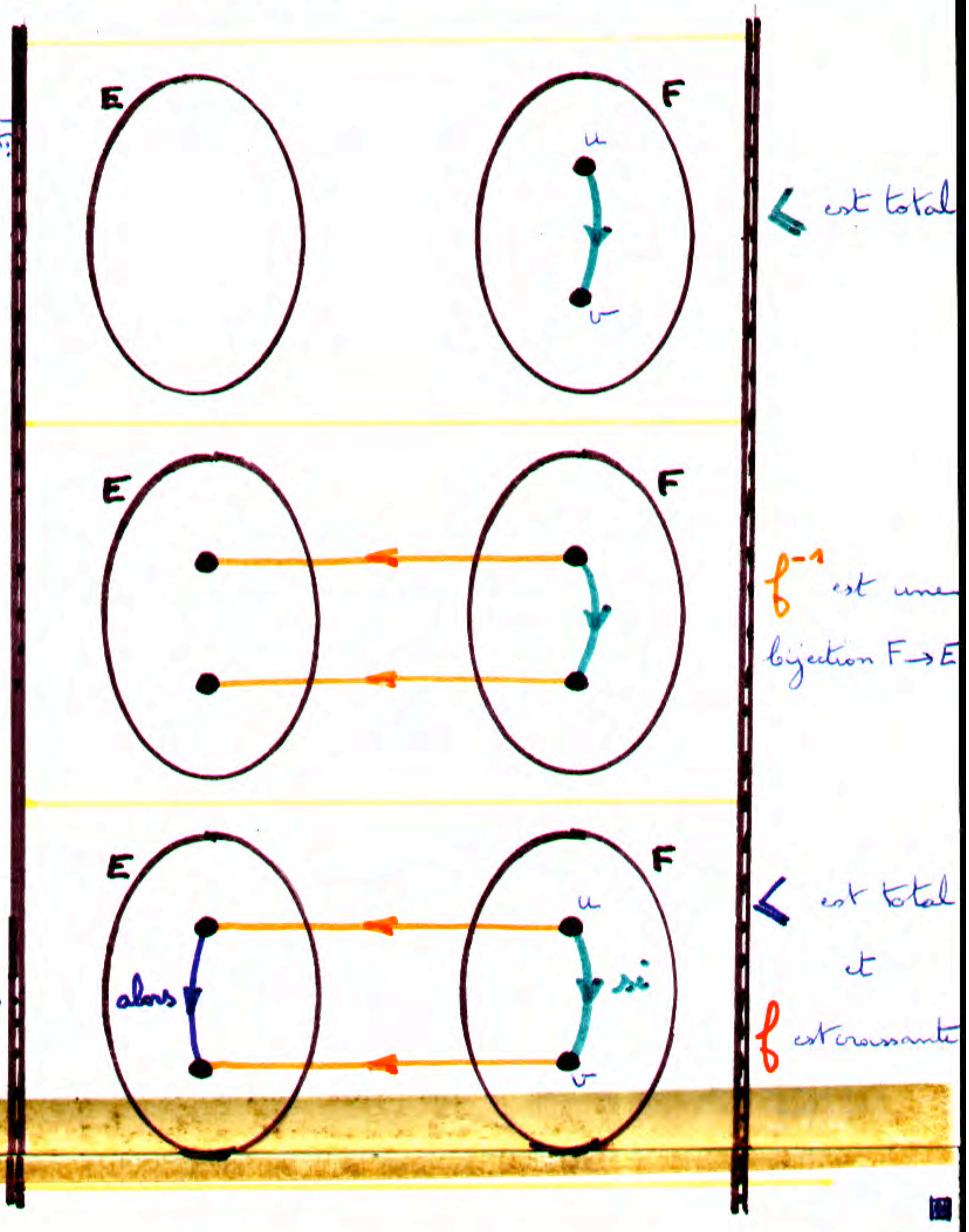


f

□ $f^{-1} : F, \leqslant \longrightarrow E, \leqslant$ est croissante

*

$\forall u, v \in F$:



$\forall u, v \in F$:

X

EX Réponse à l'EX

ordonné $E, \leqslant$	ordonné $F, \leqslant$	La réciproque de toute bijection croissante $E, \leqslant \longrightarrow F, \leqslant$ est croissante.	
total	total	**VRAI**	$\boxed{2}$
total	non total	Il n'existe pas de bij. croiss. $E, \leqslant \rightarrow F, \leqslant$	
non total	total	**FAUX**	La réciproque de toute bij. croiss. $E, \leqslant \longrightarrow F, \leqslant$ est non croissante.
non total et $\leqslant \, = 1_E$	non total et $\leqslant \, = 1_F$	**VRAI**	
non total	non total et $\leqslant \, \neq 1_F$	**FAUX**	La réciproque d'une bij. croiss $E, \leqslant \rightarrow F, \leqslant$ est croissante ou non.

EX **Si** $E, \leqslant$ est un ordonné non total
Alors $\# E \geqslant 2$

Que penses-tu de la réciproque d'une bijection décroissante entre ordonnés totaux ?
Tu trouveras aisément la réponse à cette question ... et les modifications à apporter à la démonstration du théorème 2 pour établir

3

En ordonnés totaux,
la réciproque de toute bijection décroissante est décroissante.

EX Dessine des graphes qui présentent des situations variées de bijections décroissantes d'un ordonné dans un ordonné.

3 Racine carrée, multiplication et ordre.

$\boxed{1}$ La permutation $x \longmapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}^+$
est un isomorphisme croissant de $\mathbb{R}^+, \cdot, \leqslant$ dans lui-même.

1) □ Cette permutation est un isomorphisme $\mathbb{R}^+, \cdot \longrightarrow \mathbb{R}^+, \cdot$

Reste à démontrer :

□ $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \quad \sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}}$

$\ast$ $(\sqrt{a} . \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 . (\sqrt{b})^2 = a . b$ ■

2) □ $\mathbb{R}^+, \leqslant \longrightarrow \mathbb{R}^+, \leqslant \; : \; x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante $\boxed{2}$ ■

Exercices $\qquad a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}^+$

1. $\sqrt{16 \times 25} =$ $\qquad \sqrt{0{,}125} \times \sqrt{8} =$

$\sqrt{5} \times \sqrt{20} =$ $\qquad \sqrt{7^3} \times \sqrt{7^5} =$

$\sqrt{2^8 \times 3^6} =$ $\qquad \sqrt{a^7} \times \sqrt{a^3} =$

$\sqrt{8^{-2} \times 16^4} =$ $\qquad \sqrt{10^5} \times \sqrt{1000^3} =$

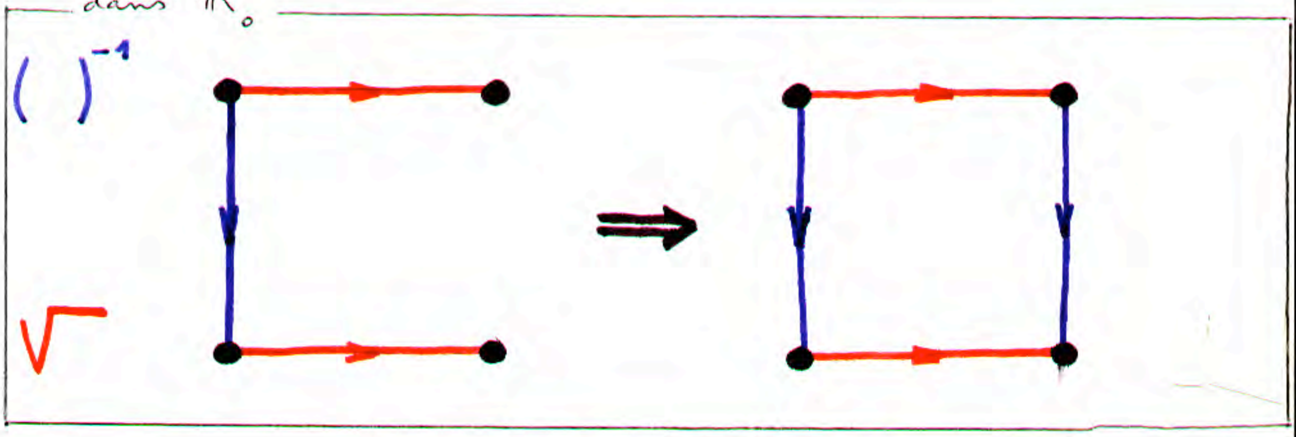
2. $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $\qquad \sqrt{18\, b^9} =$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ $\qquad \sqrt{a^8 b^5 c^3} =$

$\sqrt{5292} =$ $\qquad \sqrt{a^{2s} b^{2t+1}} =$ $\qquad (a, b \in \mathbb{R}^+_0 ; s, t \in \mathbb{Z})$

$\sqrt{2^9 \times 640} =$ $\qquad \sqrt{125\, a^{10} c^{11}} =$

3 — dans $\mathbb{R}^+_0$



4. $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \qquad \sqrt{a^{-1}} = \left(\sqrt{a}\right)^{-1}}$

5. $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

6. $\sqrt{\frac{49}{81}} =$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{75}{48}} =$

$\frac{\sqrt{2,88}}{\sqrt{2}} =$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{a^4}{b^5}} =$ $\qquad (b \in \mathbb{R}_0^+)$

7. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{5}{3}} =$

$\sqrt{\frac{1}{a^3}} = \sqrt{\frac{a}{a^4}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{b^3}{a^7 c^2}} =$ $\qquad (a, c \in \mathbb{R}_0^+)$

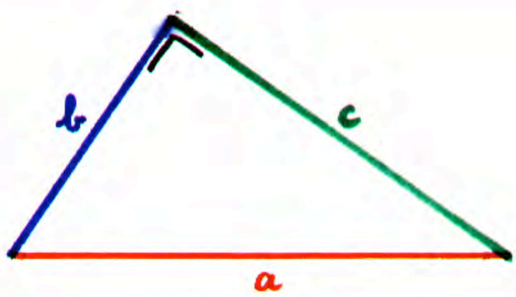
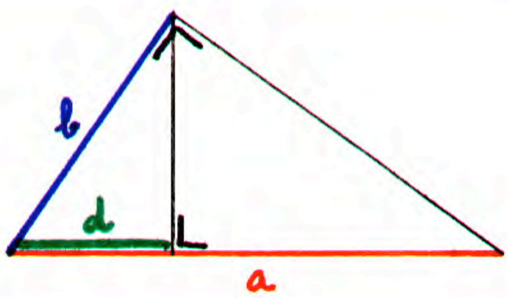
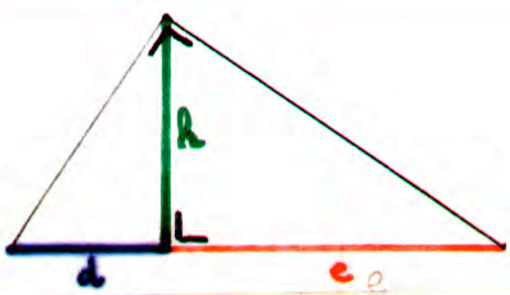
8. $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} =$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} =$

9. $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$

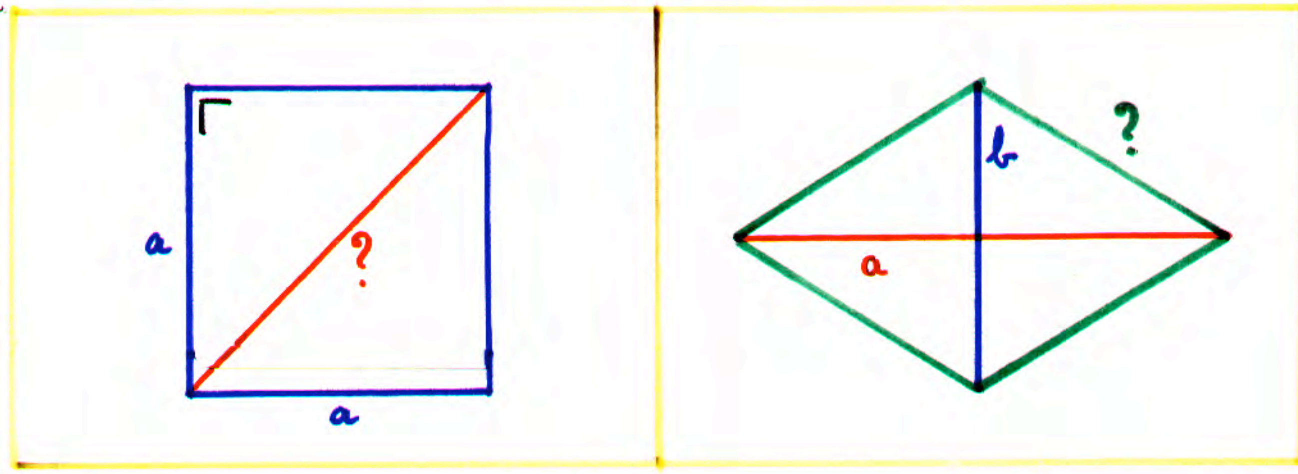
10. $\mathbb{R}^+, + \longrightarrow \mathbb{R}^+, + \; : \; x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas un isomorphisme.

Dans les exercices suivants, on suppose le plan euclidien muni d'une unité de longueur.

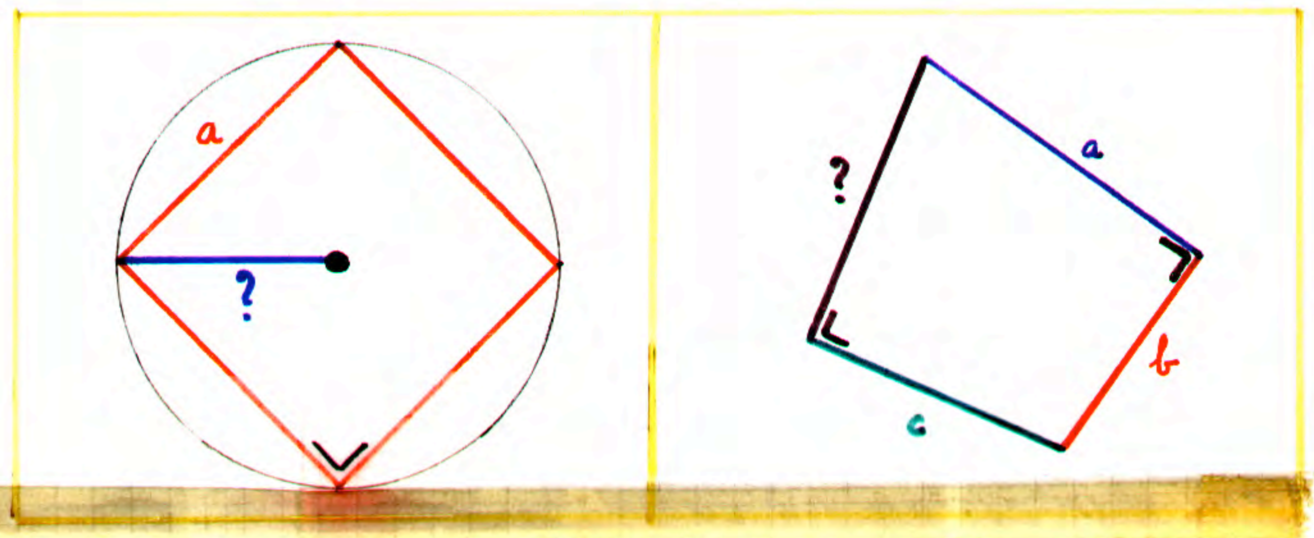
11. Pythagore

	$a^2 = b^2 + c^2$ $a =$ $b =$ $c =$
	$b^2 = ad$ $a =$ $b =$ $d =$
	$h^2 = de$ $d =$ $e =$ $h =$

12



13



14.