4

Vectoriels réels

1 Le vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$

Nous savons que

1 $\Pi_0, +$ est un groupe commutatif	$\Pi_0, +$ est un groupe commutatif
	$\forall a, b \in \mathbb{R} ; \forall \vec{u}, \vec{v} \in \Pi_0 :$
2 La multiplication scalaire	$a\vec{v} \in \Pi_0$
• est associative	$a.b\vec{v} = ab.\vec{v}.$
• distribue l'addition des réels	$(a+b).\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
• distribue l'addition des vecteurs	$a.(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
• admet $1 \in \mathbb{R}$ comme neutre	$1\vec{v} = \vec{v}$

mm 2, déf. 1 et 10, 11, 12

On résume l'ensemble de ces propriétés en disant que

1 $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ est un <u>vectoriel réel</u>.

Tu connaissais déjà le vectoriel réel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$

Tu viens seulement d'apprendre son nom !

Exercices

$a, b, \dots, x_1, \dots \in \mathbb{R}$; $\vec{u}, \vec{v}, \dots, \vec{x}, \dots \in \Pi_0$

1. $a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$

   $a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}) =$

   $(a + b + c)\vec{u} =$

   $(a + b + c + d)\vec{u} =$

   $(a + b)(\vec{u} + \vec{v}) =$

   $(a + b + c)(\vec{u} + \vec{v}) =$

   $(x_1\vec{u} + y_1\vec{v}) + (x_2\vec{u} + y_2\vec{v}) = \dots\vec{u} + \dots\vec{v}$

   $a(b\vec{u} + c\vec{v}) =$

   Justifie toutes les étapes des calculs.

2. $(-a)\vec{v} =$ $\qquad$ $a(-\vec{v}) =$

   $(a - b)\vec{v} =$ $\qquad$ $a(\vec{u} - \vec{v}) =$

   $(a - b)(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) =$ $\qquad$ $(-a)(-\vec{v}) =$

   $(4\vec{u} - 7\vec{v}) - 2(\vec{u} - 8\vec{v}) =$

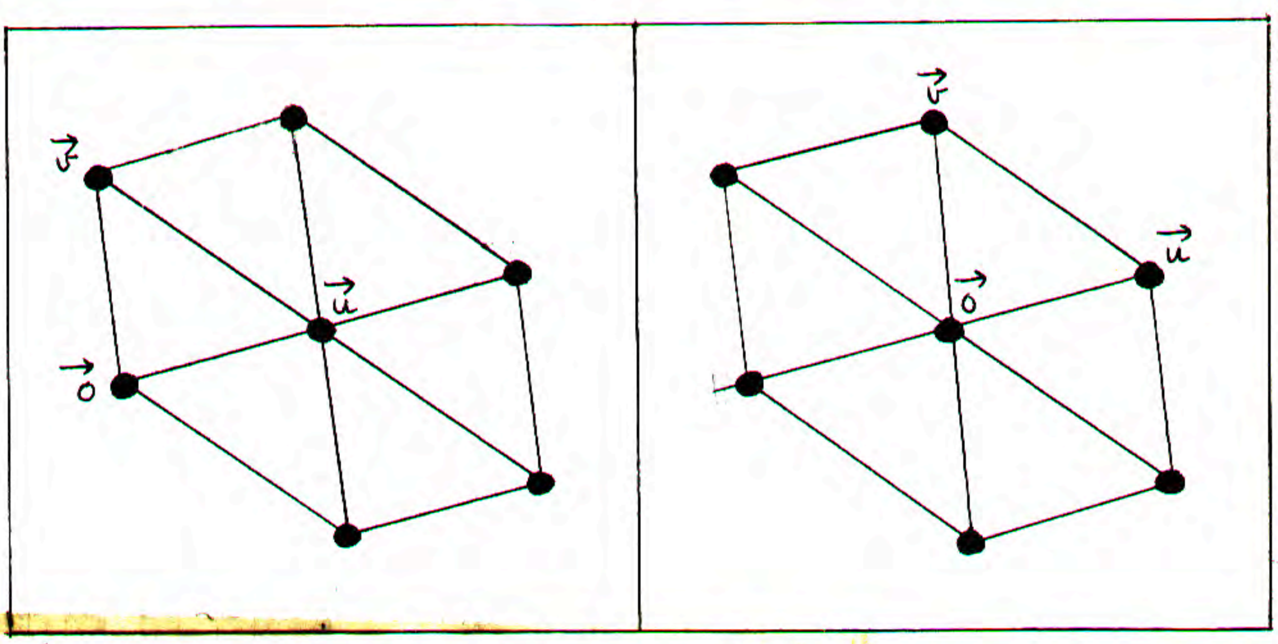
   (Tu peux faire appel à certaines propriétés déjà rencontrées dans mm 2, chap. 10, § 8)

3. Donne-toi deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ tels qu'aucun d'eux ne soit multiple de l'autre.

   Dessine $\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{u} - 2\vec{v}$, $-2(\vec{u} + \vec{v}) + (5\vec{u} + 3\vec{v})$,

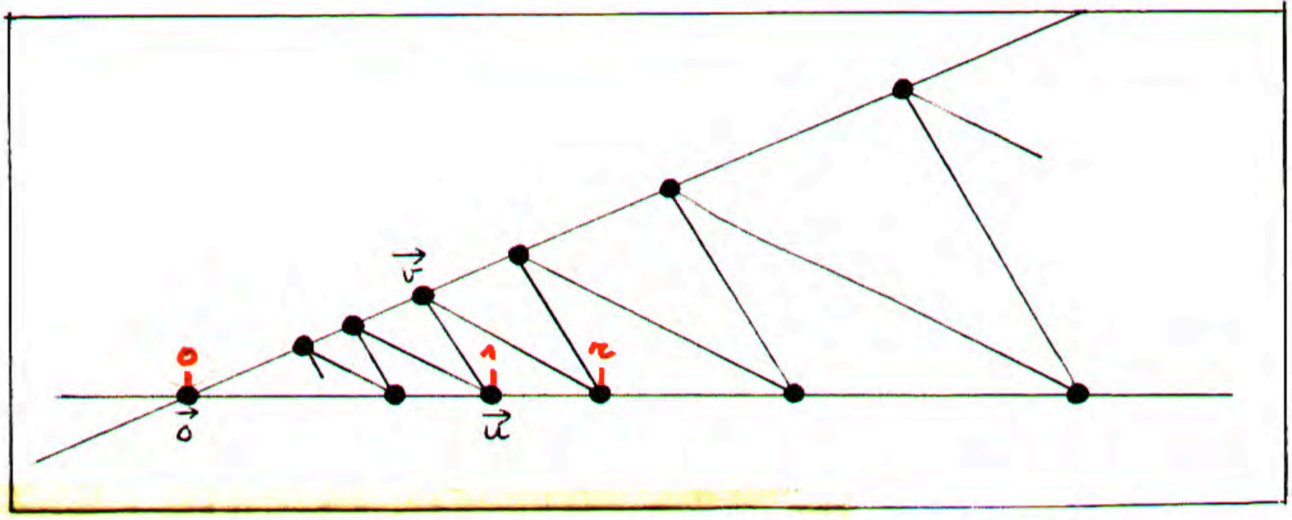
   $4(3\vec{u} - 1{,}5\vec{v}) - 2(6\vec{u} - 2{,}5\vec{v})$

4.



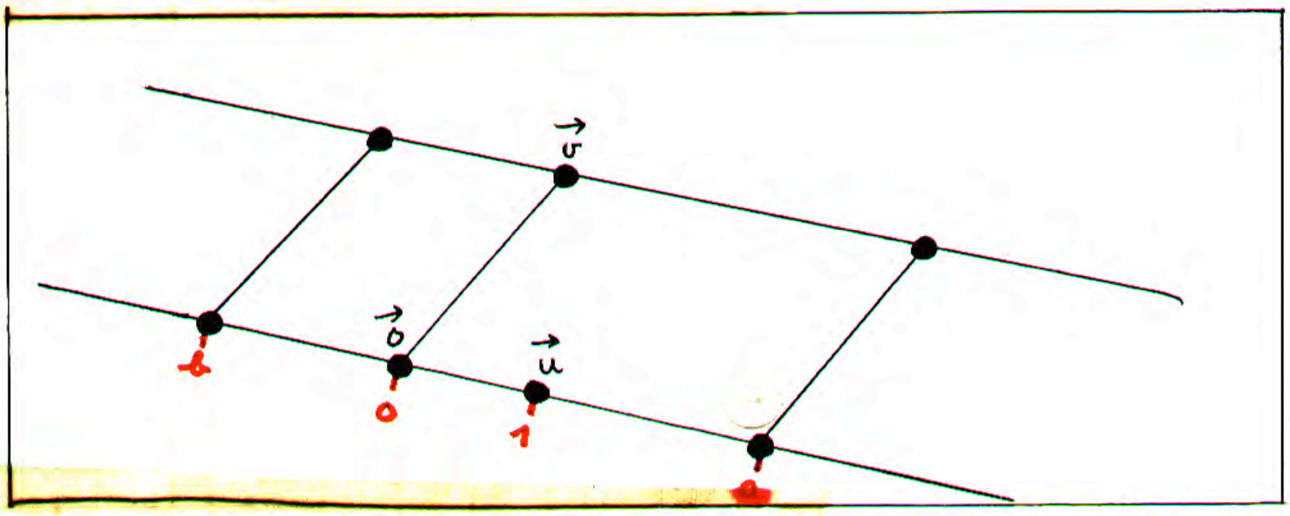
Vecteurs représentés par ces points ?

5.



Vecteurs représentés par ces points ?

6.



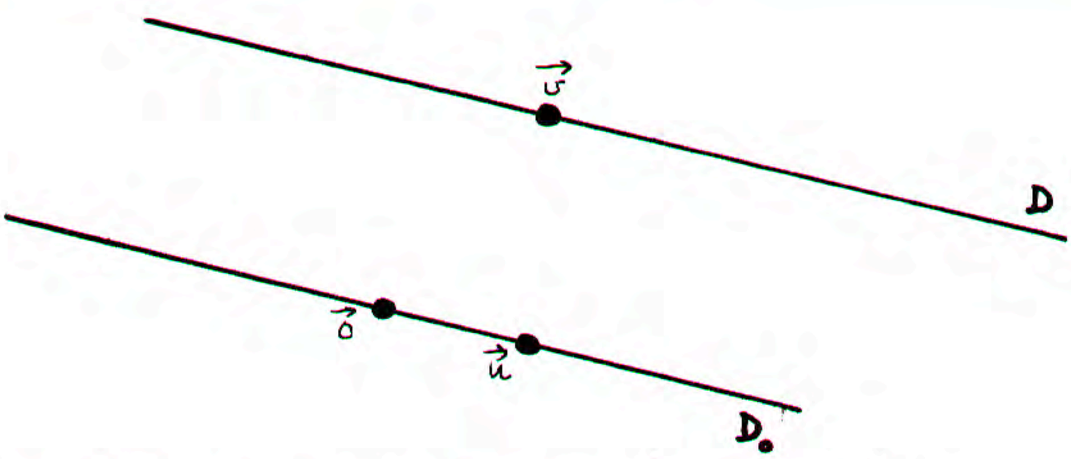
Vecteurs représentés par ces points ?

7. <u>Définitions</u>

Dans $\mathbb{R}$, Π_0, $+$:

droite vectorielle $= \{ r\vec{u} \mid r \in \mathbb{R} \}$ avec $\vec{u} \in \Pi_0 \setminus \{\vec{0}\}$

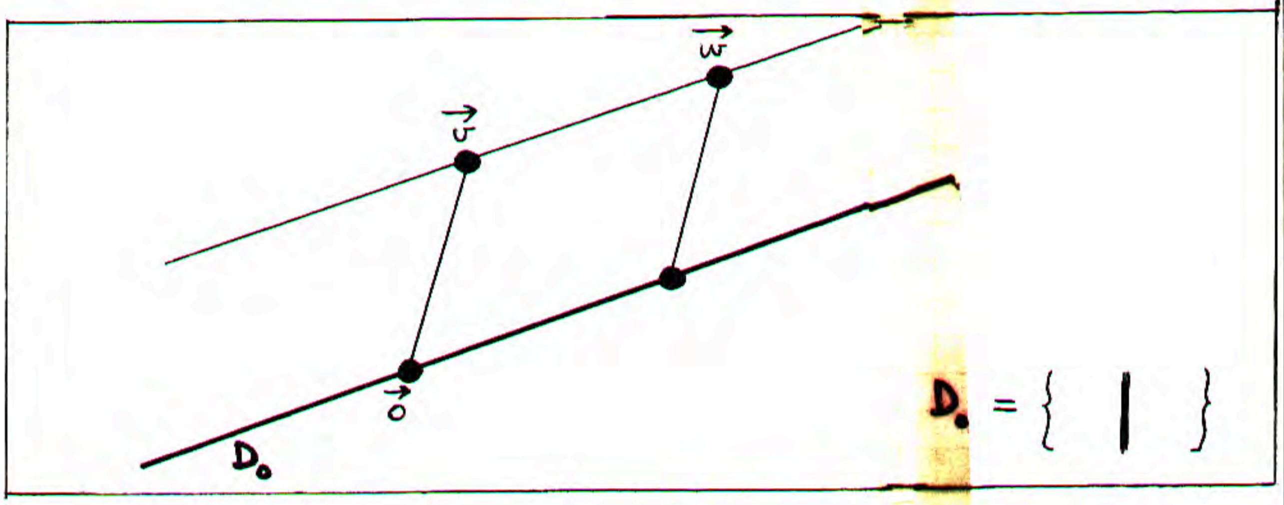
droite $= \{ \vec{v} + r\vec{u} \mid r \in \mathbb{R} \}$ avec $\vec{u} \in \Pi_0 \setminus \{\vec{0}\}$



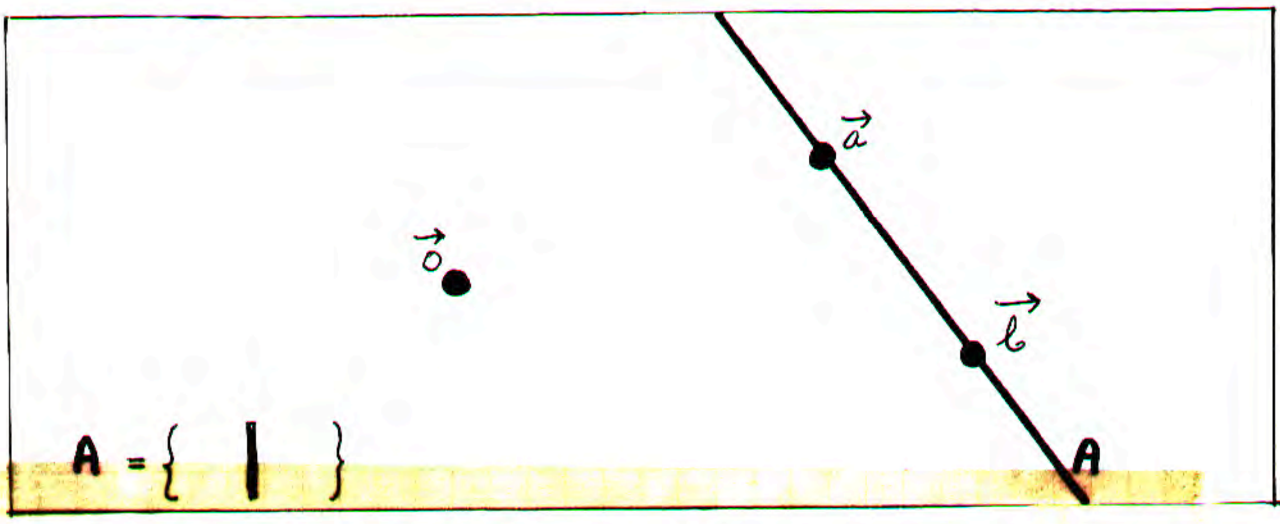
La droite vectorielle D_0 et la droite D

8. Toute droite vectorielle est une droite.

9.



10.



11. Dessine deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ tels qu'aucun d'eux ne soit multiple de l'autre.

Dessine des vecteurs $\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{g}$ tels que

$$\begin{array}{lcl} \vec{c} \parallel \vec{a} & \text{et} & \vec{c} \not\parallel \vec{b} \\ \vec{d} \not\parallel \vec{a} & \text{et} & \vec{d} \parallel \vec{b} \\ \vec{f} \parallel \vec{a} & \text{et} & \vec{f} \parallel \vec{b} \\ \vec{g} \not\parallel \vec{a} & \text{et} & \vec{g} \not\parallel \vec{b} \end{array}$$

Ecris chacun des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{g}$ sous la forme

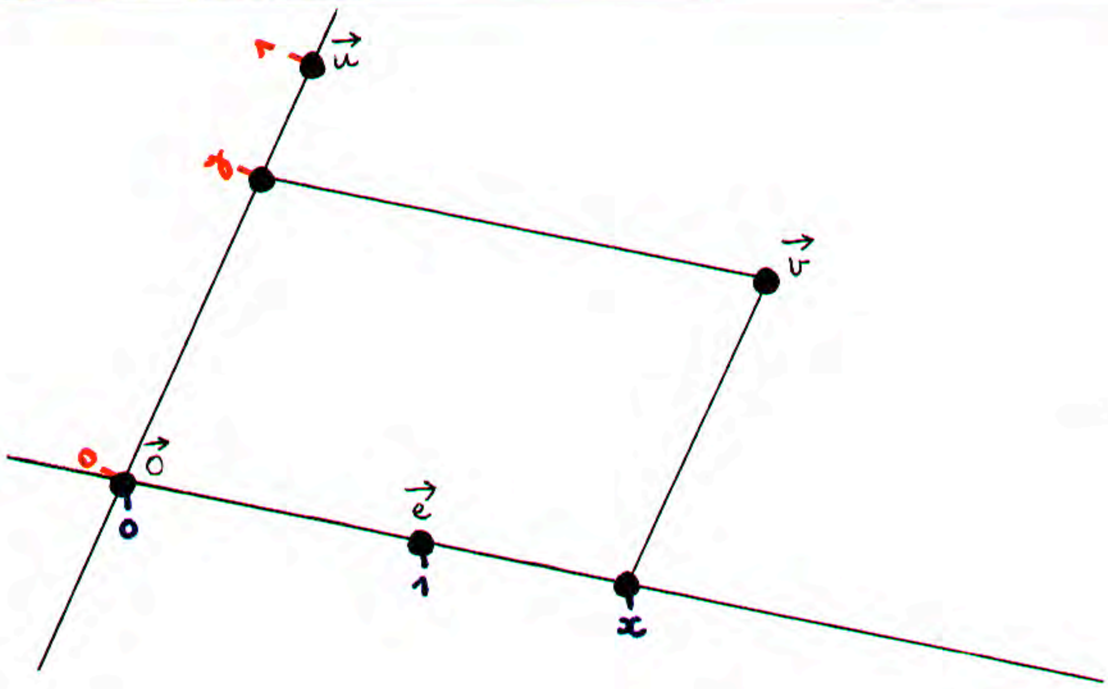
$$x\vec{a} + y\vec{b}$$

où x, y désignent des réels.

2 Bases et coordonnées dans le vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_o, +$

Voici des vecteurs non parallèles $\vec{e}$ et $\vec{u}$ du vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_o, +$

Proposons-nous d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ au moyen de $\vec{e}$ et $\vec{u}$ et des nombres réels.



$$\boxed{\vec{v} = x\vec{e} + y\vec{u}}$$

Pour tout vecteur $\vec{v}$ de Π_o, il existe un et un seul couple de réels (x, y), tel que $\vec{v} = x\vec{e} + y\vec{u}$. Ce fait s'exprime :

$(\vec{e}, \vec{u})$ est une <u>base</u> du <u>vectoriel</u> $\mathbb{R}, \Pi_o, +$

---

1 — $\vec{e}, \vec{u} \in \Pi_o$

$(\vec{e}, \vec{u})$ est une <u>base</u> du <u>vectoriel</u> $\mathbb{R}, \Pi_o, +$

<u>ssi</u>

$$\forall \vec{v} \in \Pi_o,\ \exists!\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad \vec{v} = x\vec{e} + y\vec{u}$$

(x, y) est la <u>coordonnée</u> de $\vec{v}$ ______ en base $(\vec{e}, \vec{u})$

2

En le vectoriel $\mathbb{R}, \pi_0, +$:

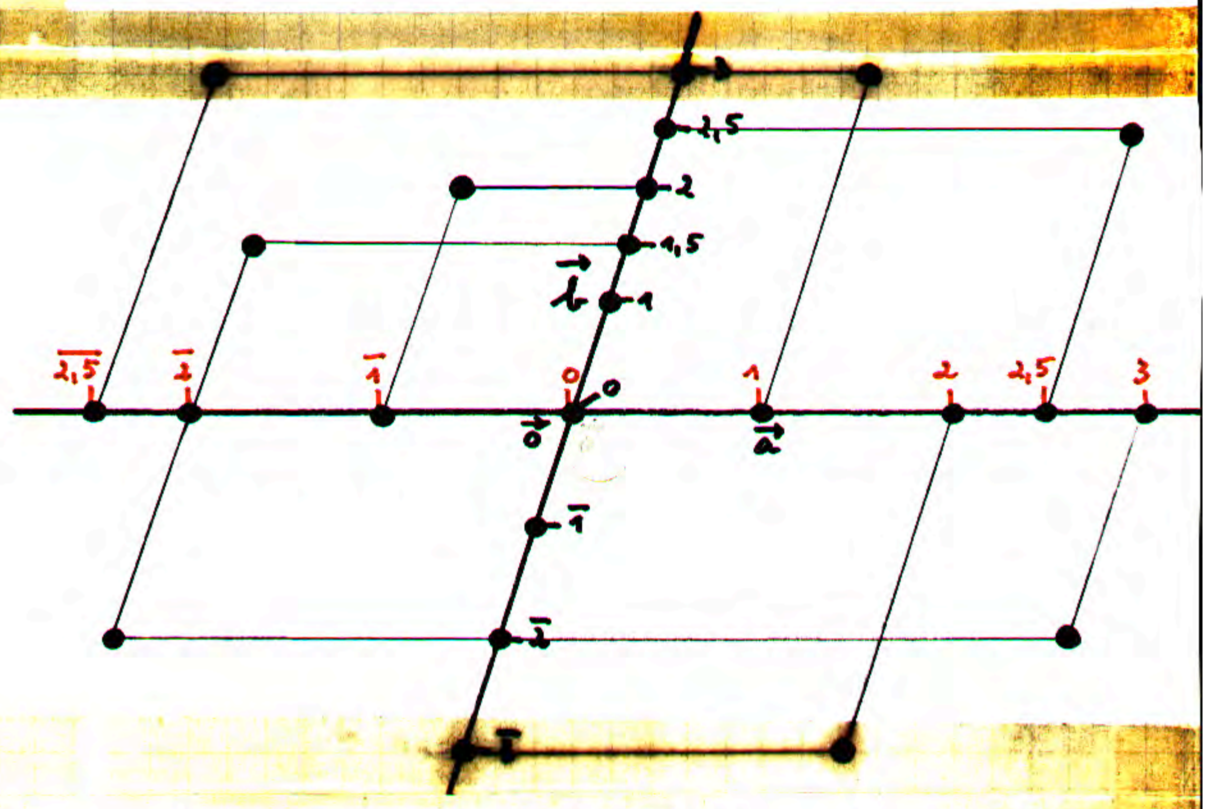
- tout couple de vecteurs non parallèles est une base
- toute base $(\vec{e}, \vec{u})$ définit une bijection

$$\pi_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x\vec{e} + y\vec{u} \longmapsto (x, y)$$

Nous avons introduit la notation $\mathbb{R}^2$ pour $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercices

1.



Coordonnées en base $(\vec{a}, \vec{b})$ des vecteurs représentés par ces points?

Contemple et commente !

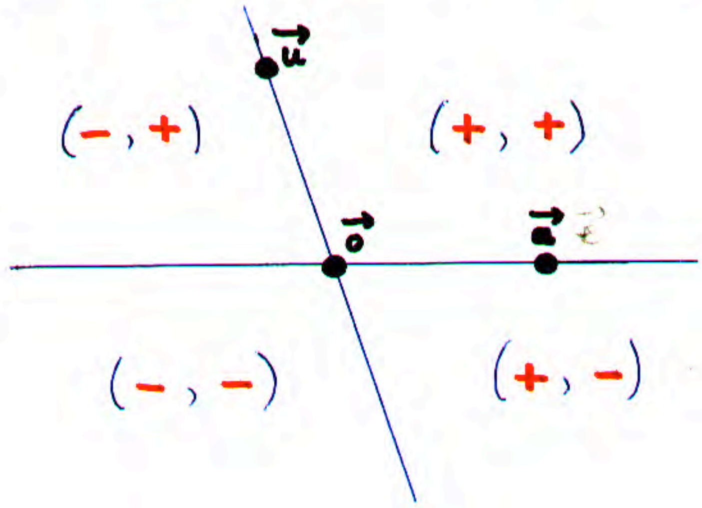
2. Coordonnées de ces vecteurs en base $(\vec{b}, \vec{a})$?

3. Coordonnées de ces vecteurs en base $(2\vec{a}, 3\vec{b})$?

4. Donne-toi une base de Π_0

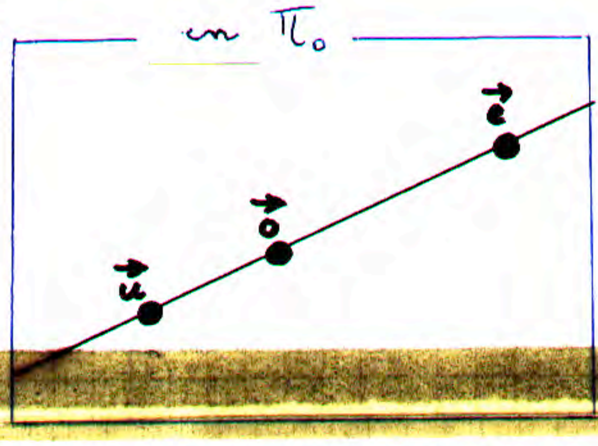
Marque les points de coordonnées $(-1{,}5\,;1)$, $(0\,;2)$, $(5\,;0)$, $(2\,;-3{,}5)$, $(1\,;1)$, $(-1\,;-2)$, $(-2,-1)$

5.



Commente !

6.



Les couples $(\vec{e},\vec{u})$

$(\vec{e},\vec{e})$

$(\vec{o},\vec{e})$

sont-ils des bases de Π_0 ?

7. $(\vec{e},\vec{u})$ n'est pas une base de Π_0

ssi

il existe $\vec{v} \in \Pi_0$ qui ne puisse s'écrire $x\vec{e}+y\vec{u}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ d'une et d'une seule manière.

3 Le vectoriel $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

La base $(\vec{e}, \vec{u})$ du vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ est fixée.

Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ et $r\vec{v}_1$ à partir de celles de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$.

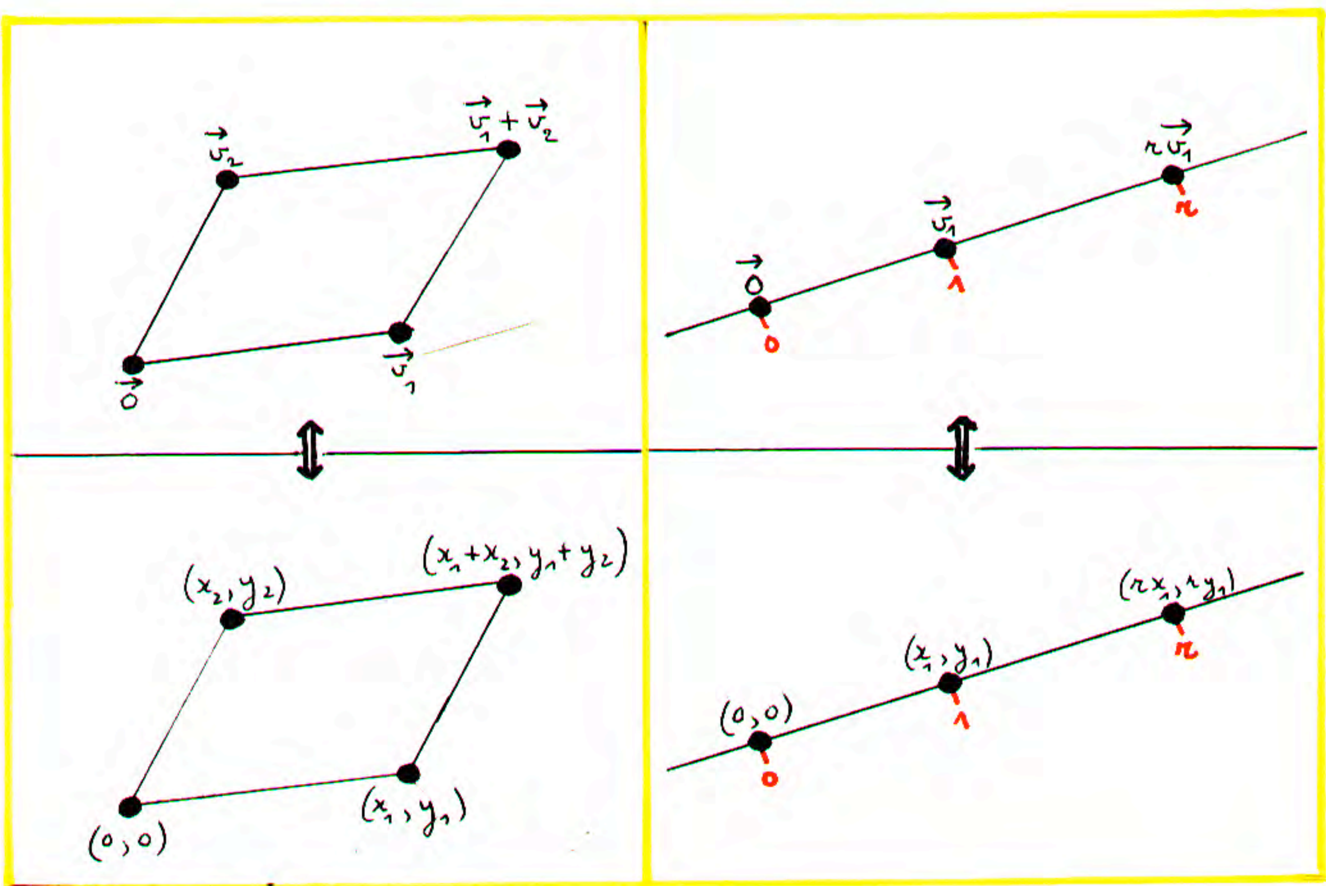
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1\vec{e} + y_1\vec{u}) + (x_2\vec{e} + y_2\vec{u})$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{e} + (y_1 + y_2)\vec{u}$$

$$r\vec{v}_1 = r.(x_1\vec{e} + y_1\vec{u})$$
$$= r.x_1\vec{e} + r.y_1\vec{u}$$
$$= rx_1.\vec{e} + ry_1.\vec{u}$$

Donc

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ est la coordonnée de $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

(rx_1, ry_1) est la coordonnée de $r\vec{v}_1$



Ces résultats nous conduisent tout naturellement à munir $\mathbb{R}^2$ d'une addition et d'une multiplication scalaire.

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 ; r \in \mathbb{R}$

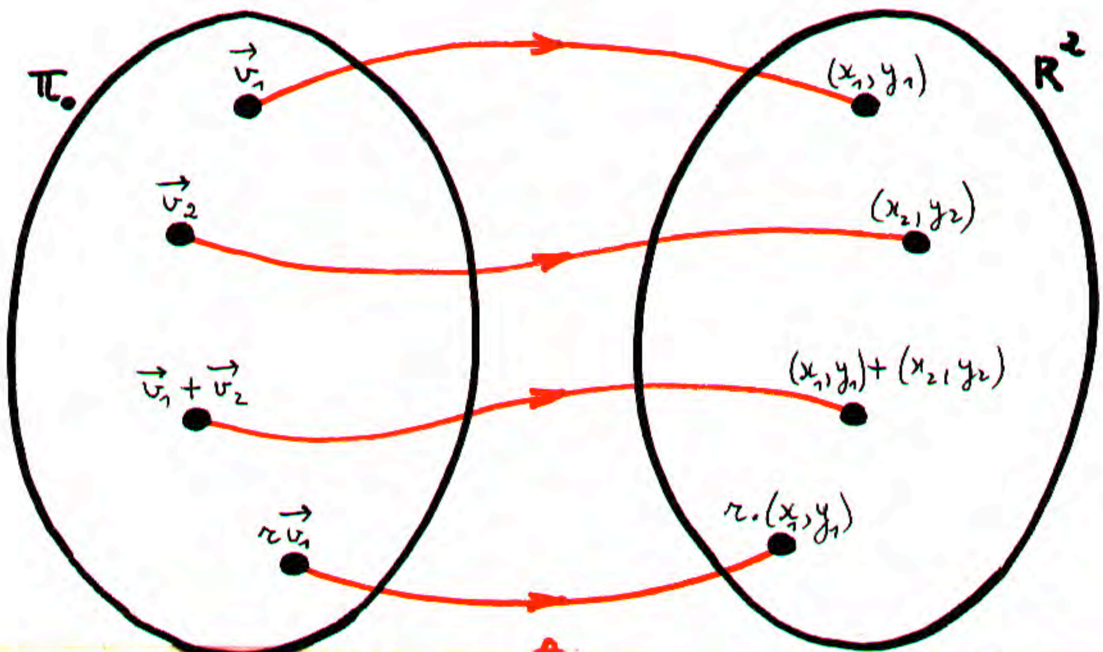
1	3
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$	$r \cdot (x_1, y_1) = (r x_1, r y_1)$
Addition dans $\mathbb{R}^2$	Multiplication scalaire.

En vertu de ces définitions :

$\forall \vec{v} \in \Pi_0 ; r \in \mathbb{R}$

1	2
La coordonnée de la somme de deux vecteurs égale la somme de leurs coordonnées.	Coordonnée de $r\vec{v}$ égale $r \cdot$ coordonnée de $\vec{v}$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire, est un modèle parfait du vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$



f

La bijection f transporte les propriétés du vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ dans $\mathbb{R}^2$

3

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$ est un vectoriel réel.

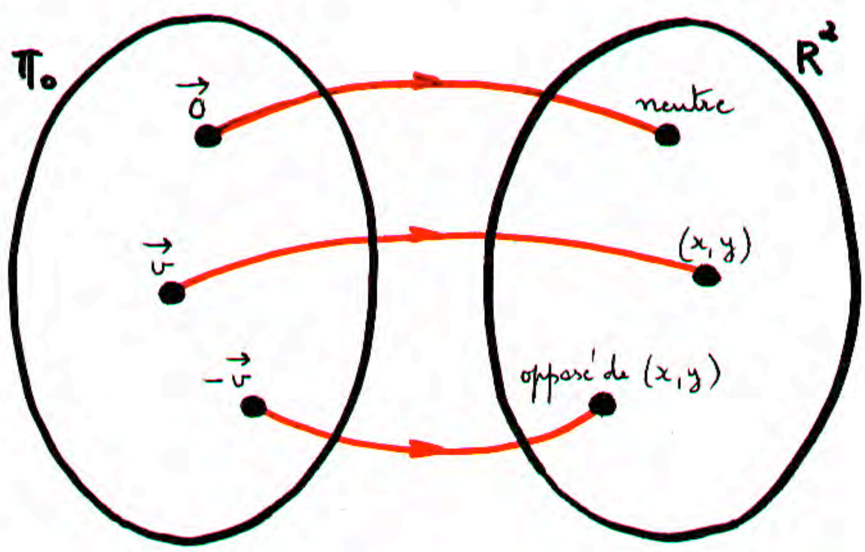
Toute base du vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ définit un isomorphisme de vectoriels

$\Pi_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{v} \longmapsto$ coordonnée de $\vec{v}$

Quel est le neutre de $\mathbb{R}^2, +$?

Quel est l'opposé de (x, y) dans le groupe $\mathbb{R}^2, +$?

Toute base de Π_0 définit une bijection $\Pi_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



3

$(0,0)$ est le neutre du groupe $\mathbb{R}^2, +$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x, -y)$ est l'opposé de (x, y)

On pose $-(x, y) = (-x, -y)$

Exercices

1. Calculs en $\mathbb{R}^2$:

$(1;2) + (3;4) =$

$(-1;4) + (3;-4) =$

$(-5;6) + (2;7,2) =$

$423\,(12;-5) + 423\,(-12;6) =$

$38\,(2;-1) - 90\,(-1;2) - 40\,(2;-1) + 100\,(-1;2) =$

$3\,(-5;7) =$

$\frac{1}{2}(7;-6) =$

$2\,(3;4) - 5\,(-2;7) =$

2. En $\mathbb{R}^2$, résouds les équations

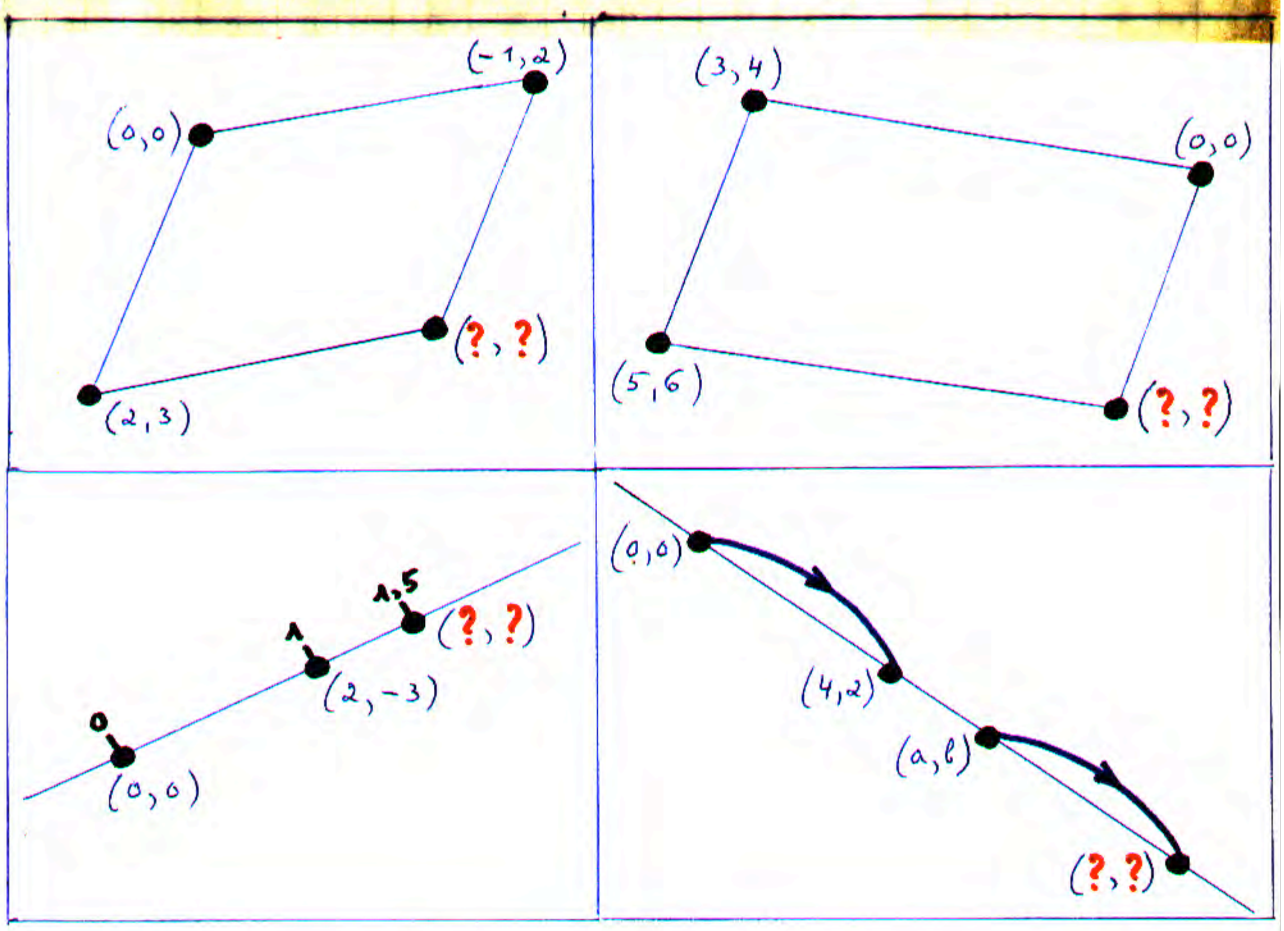
$(3;-2) + (x;y) = (1;-3)$

$4\,(x;-2) - 5\,(1;y) = (0,0)$

$3\,(x;y) = (-2;5)$

$2\,(x;3) = -4\,(5;y)$

3.

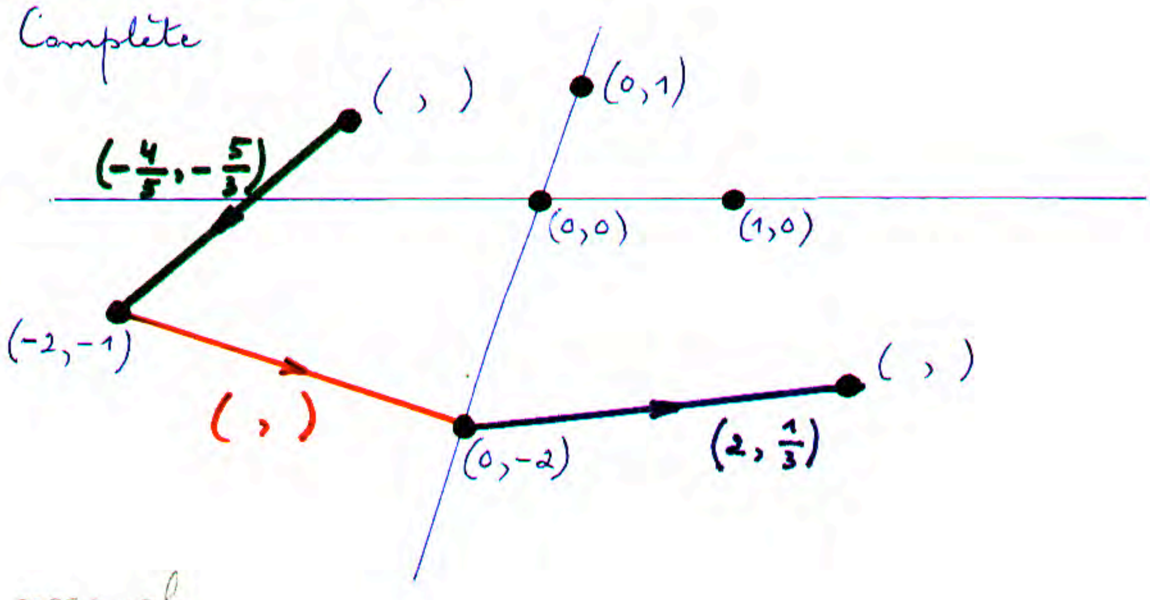


4.

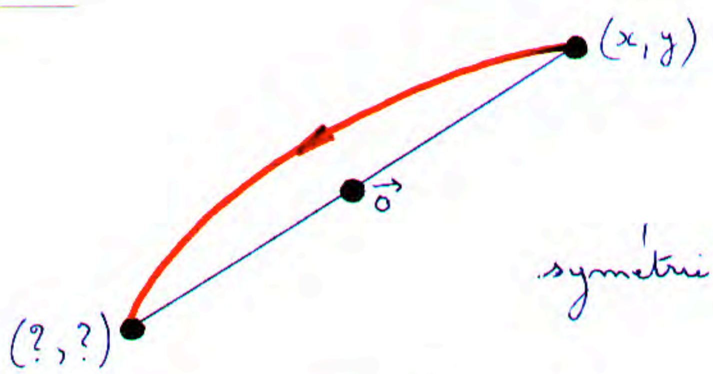
5. 

Coordonnée de $\vec{v}$?

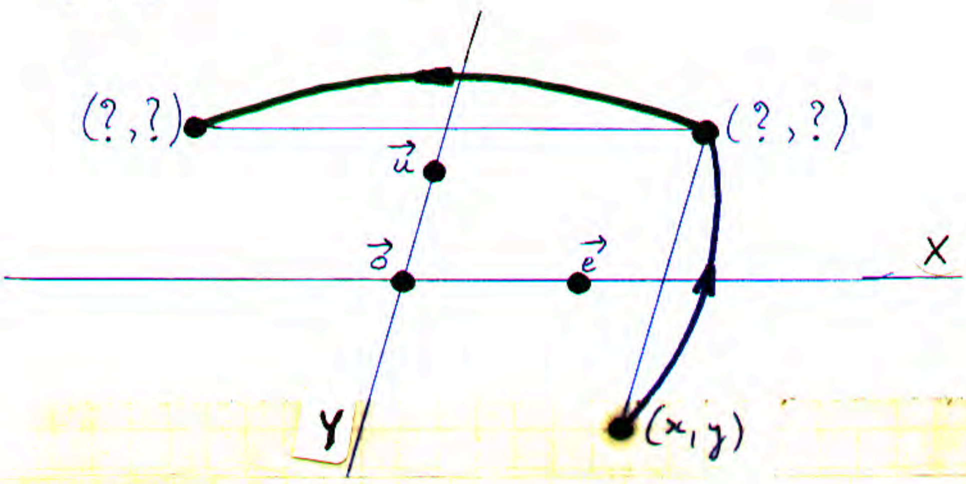
6. Complète



espace normal

7. 

symétrie s_0 de centre o

8. 

symétrie s_1 d'axe X, parallèle à Y

symétrie s_2 d'axe Y, parallèle à X

Etablis $\quad s_2 \circ s_1 = s_0 = s_1 \circ s_2$

Cette situation est l'occasion de quelques exercices sur les groupes.

9. Posant

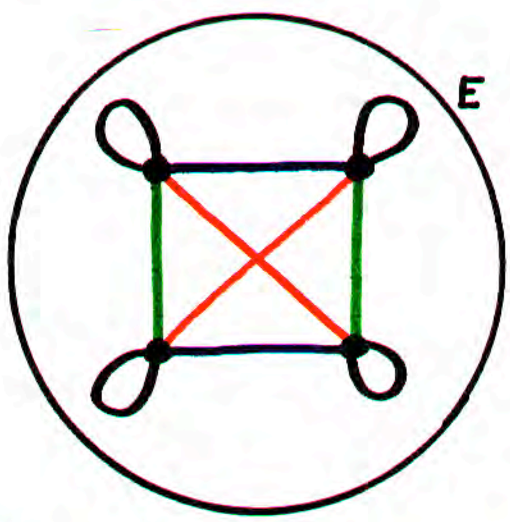
$1_{\mathbb{R}^2} = \bullet \quad , \quad s_1 = \bullet \quad , \quad s_2 = {\color{green}\bullet} \quad , \quad s_0 = {\color{red}\bullet}$

la table de composition de $\{\bullet, \bullet, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}\}, \circ$ s'écrit

$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	${\color{green}\bullet}$	${\color{red}\bullet}$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	${\color{green}\bullet}$	${\color{red}\bullet}$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	${\color{red}\bullet}$	${\color{green}\bullet}$
${\color{green}\bullet}$	${\color{green}\bullet}$	${\color{red}\bullet}$	$\bullet$	$\bullet$
${\color{red}\bullet}$	${\color{red}\bullet}$	${\color{green}\bullet}$	$\bullet$	$\bullet$

Montre que $\{\bullet, \bullet, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}\}, \circ$ est un groupe commutatif.

10.



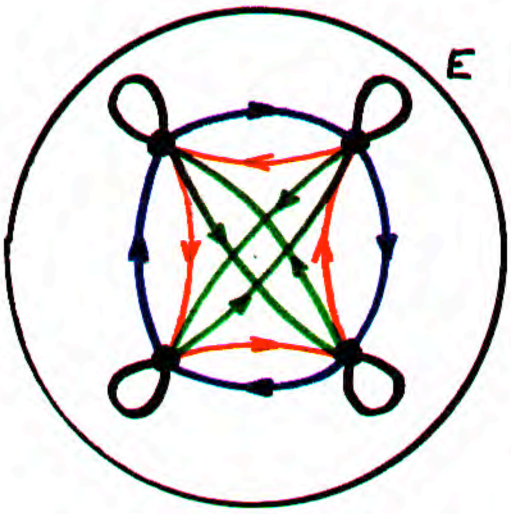
$\{\bullet, \bullet, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}\}, \circ$ est un groupe commutatif de permutations de E

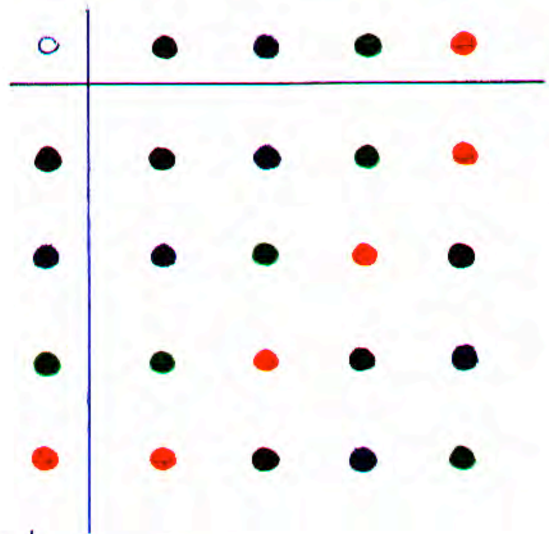
Sa table de composition est celle de l'exercice 9. Vérifie !

Les deux groupes sont <u>isomorphes</u>.

11. Tout groupe isomorphe aux groupes rencontrés aux exercices 9 et 10 est appelé <u>Vierergruppe de Klein</u>.

Veux-tu construire un groupe de quatre éléments non Vierergruppe de Klein ?





Groupe cyclique d'ordre 4

12. Tout groupe de quatre éléments est un groupe cyclique ou un groupe de Klein.

13. Examine si les groupes

$$\mathcal{P}\{a, b\}, \Delta \qquad (a \neq b)$$

$$\mathbb{Z}_4, +$$

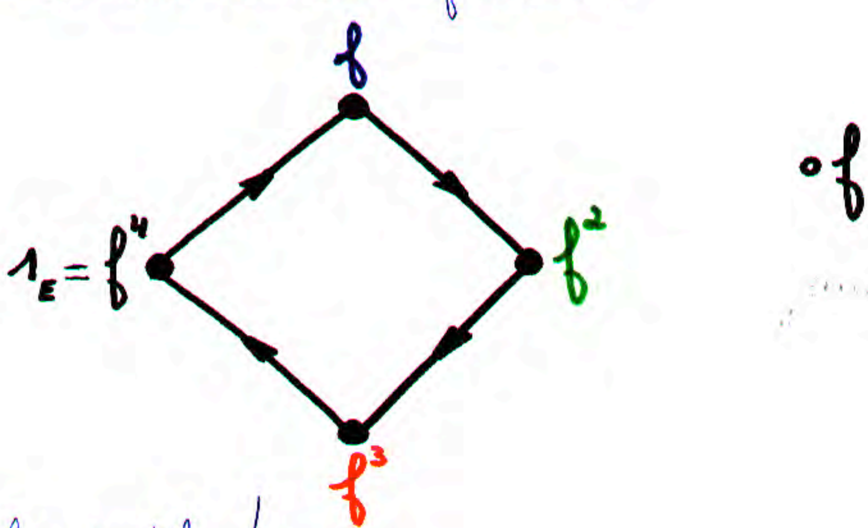
$$\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot$$

sont des groupes cycliques ou des groupes de Klein.

14. **Définition**

> Un groupe est *cyclique*
>
> ssi
>
> il comprend un élément dont tout élément du groupe est une puissance (ou un multiple).

15. Le groupe de permutations, présenté en l'exercice 11, est cyclique au sens de cette définition :



Contemple ; justifie !