5

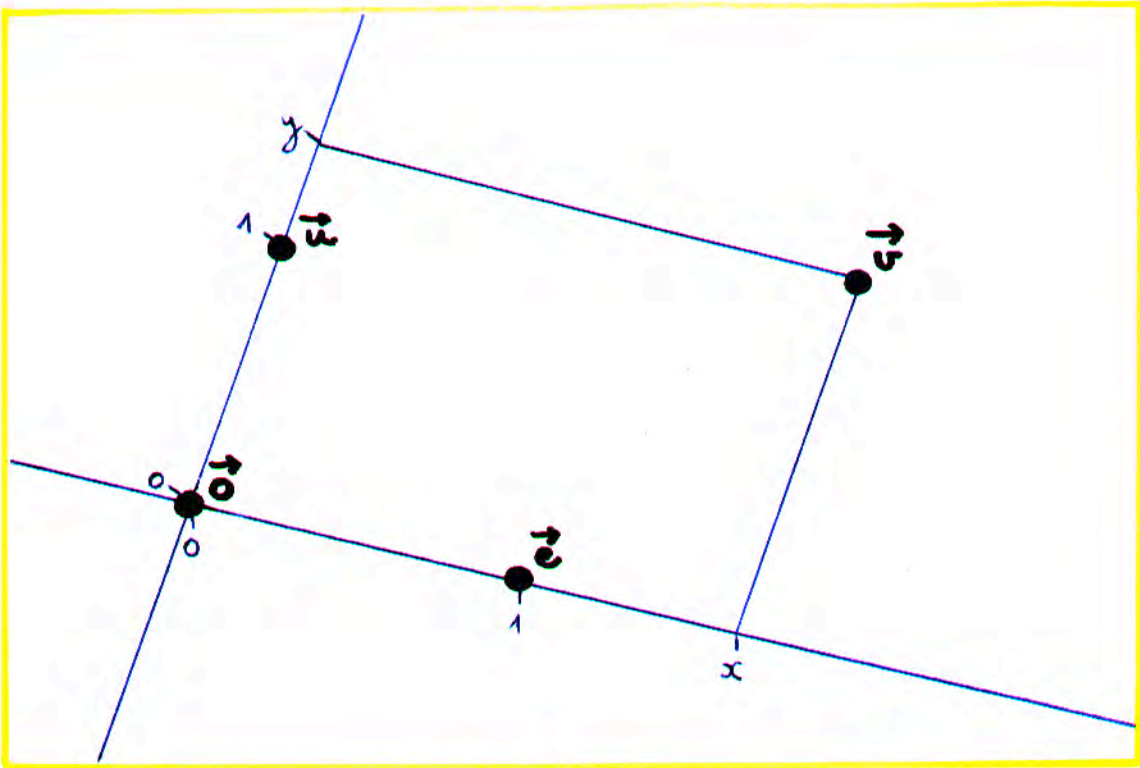
Relations dans $\mathbb{R}$

1 Relations dans $\mathbb{R}$

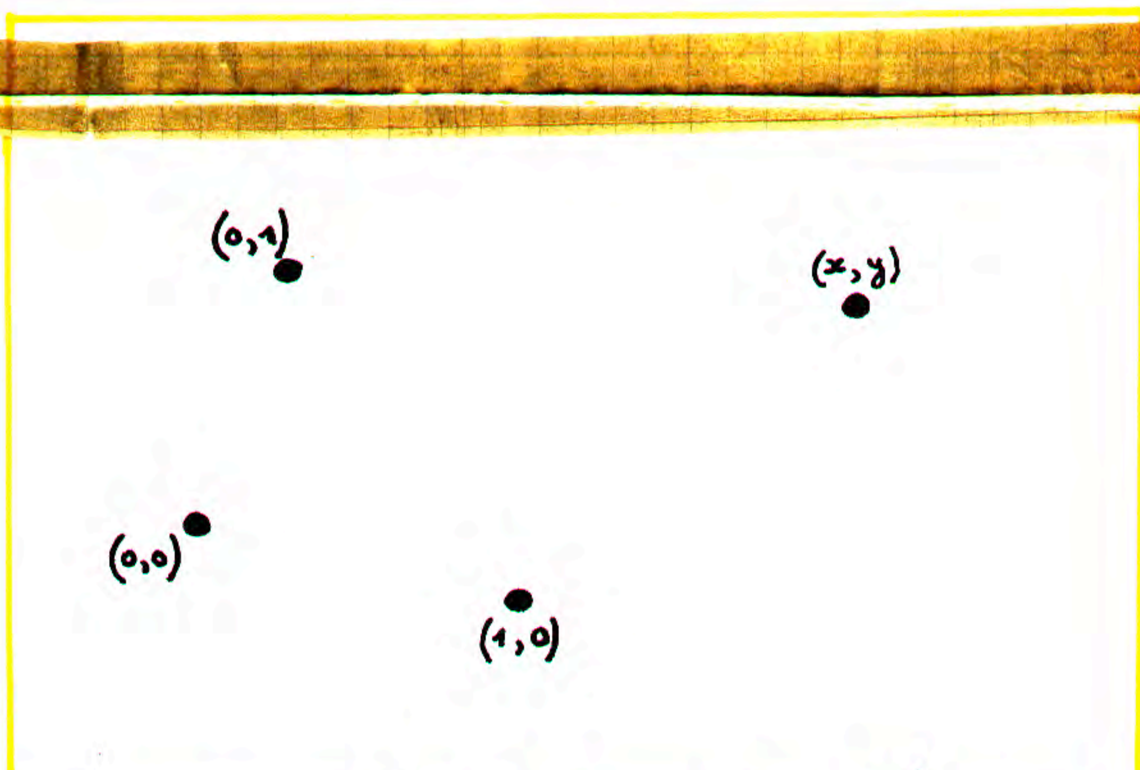
En fixant un point o dans le plan π, le plan s'est érigé en vectoriel.

... et le plan π est devenu le vectoriel $\mathbb{R}, \pi_o, +$

Fixons une base $(\vec{e},\vec{u})$ dans le vectoriel $\mathbb{R}, \Pi_0, +$



La bijection $\Pi_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{v} = x\vec{e}+y\vec{u} \longmapsto (x,y)$
identifie tout vecteur $\vec{v}$ à sa coordonnée (x,y)

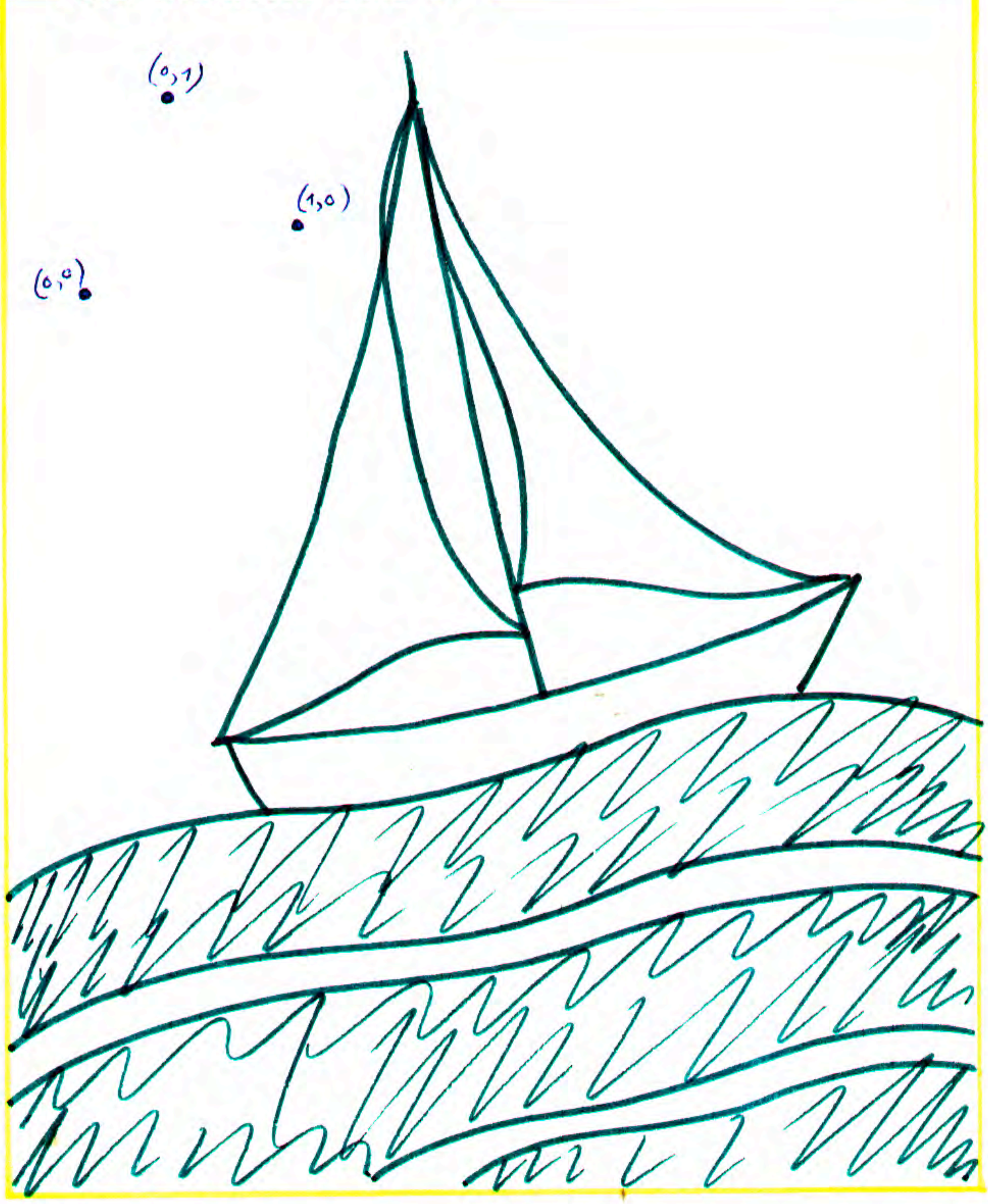


. . . et le plan Π est devenu $\mathbb{R}^2$

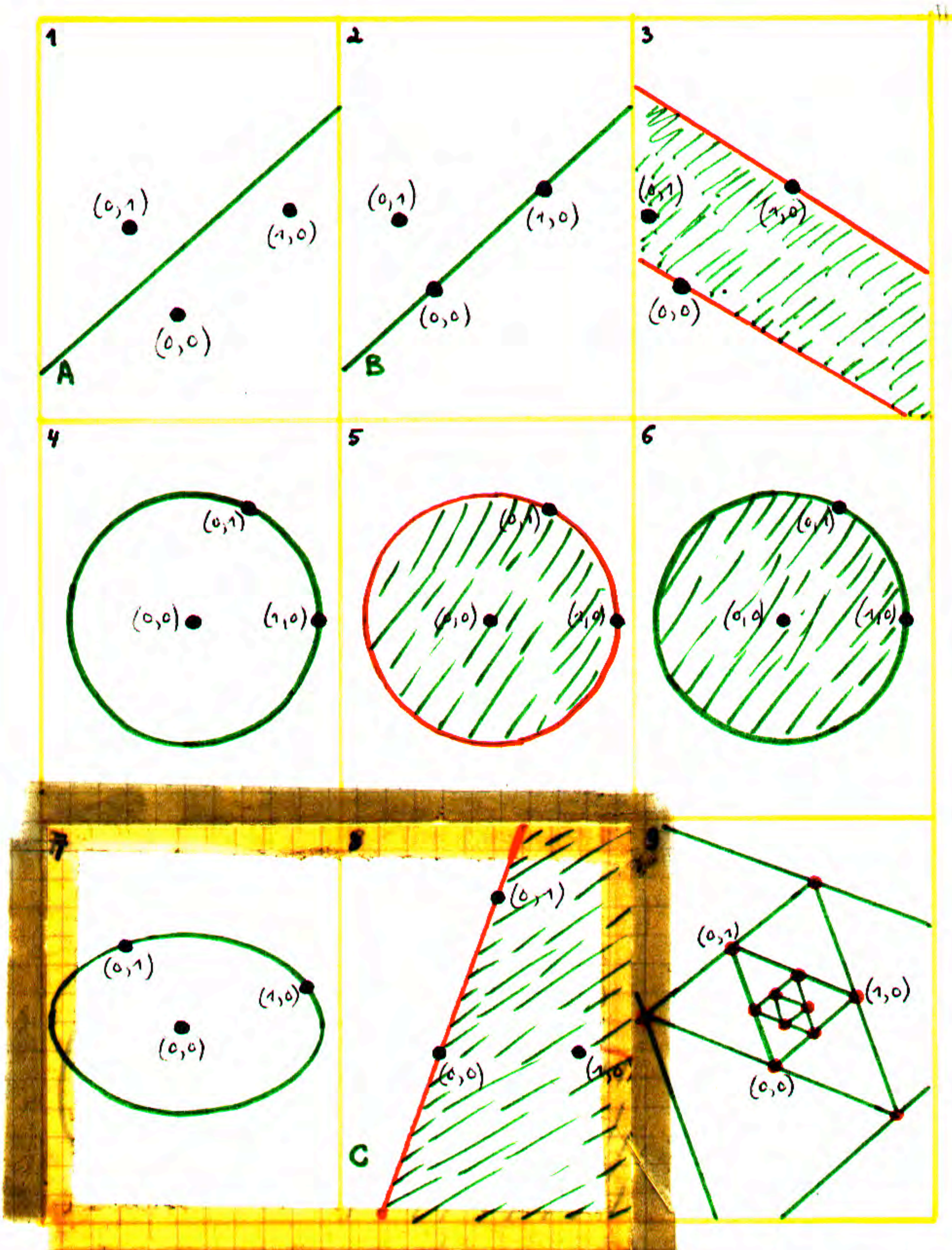
Les couples $(0,0),(1,0),(0,1)$ constituent un <u>repère</u> du plan Π.

Relation dans $\mathbb{R}$ $\triangleq$ ensemble de couples de réels $=$ partie de $\mathbb{R}^2$
entiers

UNE RELATION DANS R

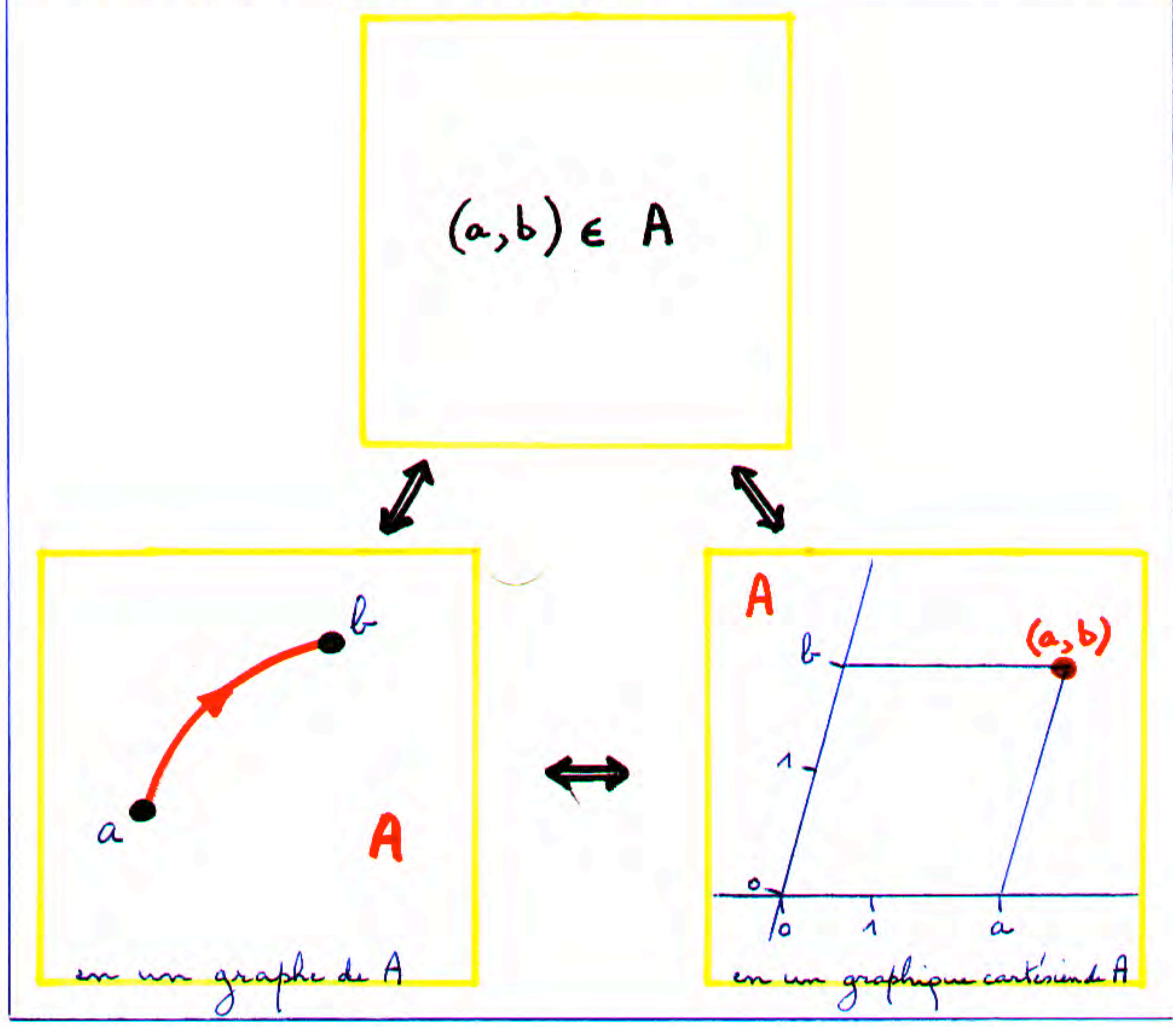


Relations dans $\mathbb{R}$:



Le dessin, dans le plan Π_0 muni d'une base, d'une relation dans $\mathbb{R}$ est parfois appelé graphe cartésien ou graphique cartésien de cette relation.

Pour toute relation A dans $\mathbb{R}$



Exercices

1. Les couples $(0,0), (1,0), (0,1)$ appartiennent-ils aux relations ci-dessus ?
2. Chaque fois que cela t'est possible, fournis de nombreux éléments de ces relations.
3. La relation A n'est pas égale à la relation B

fin des exercices

Examine attentivement la relation 8

C est un demi-plan ouvert

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$

rouge

En bref : $\boxed{C \equiv x > 0}$

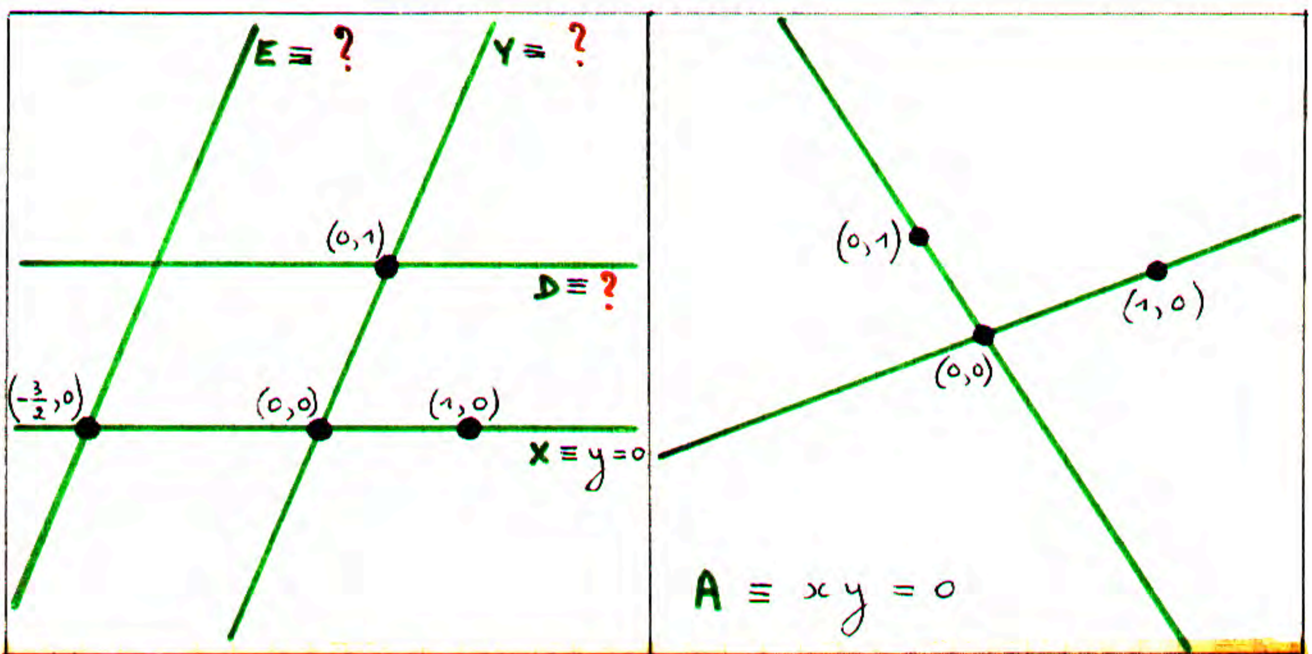
ce qui se lit C est la relation (dans $\mathbb{R}$) définie par $x > 0$

ou, brièvement :

$\boxed{C \text{ est la relation } x > 0}$

Exercices

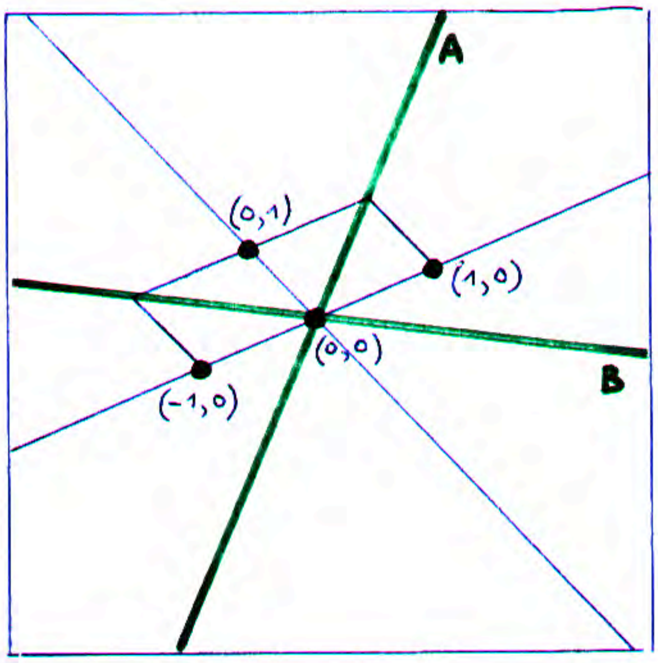
1.



Justifie les réponses données pour X et A.

2. $D \equiv y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad D \equiv y - 1 = 0$

3.



$A \equiv x = y$

$B \equiv$?

$A \cup B \equiv$?

4. Dessine quelques éléments de $\quad C \equiv x > y$

Dessine C

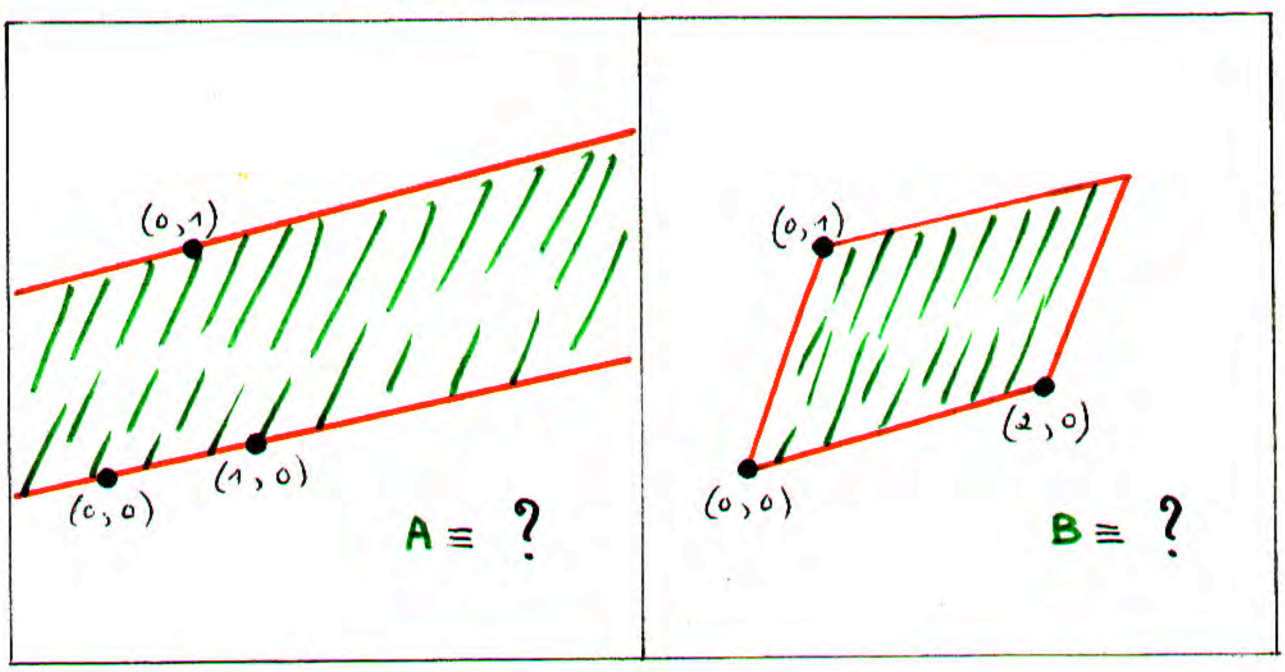
5. Mêmes questions pour $\quad D \equiv |x| > |y|$

6. Dessine les relations

$$A \equiv x \cdot (y-2) = 0$$

$$B \equiv x^2 - x = 0$$

7.



8. La relation $x \neq x$ est vide.

9. La relation $x = x$ égale $\mathbb{R}^2$

10. En l'exercice 3 : voici plusieurs réponses pour la relation A ∪ B

$$x = y \quad \vee \quad x = -y$$

$$x = \pm y$$

$$y = \pm x$$

$$(x-y)\cdot(x+y) = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$|x| = |y|$$

$$x^2 + 2 = y^2 + 2$$

x égale à y en valeur absolue

Ecris-en encore quelques autres.

2 Axes et centres de symétrie

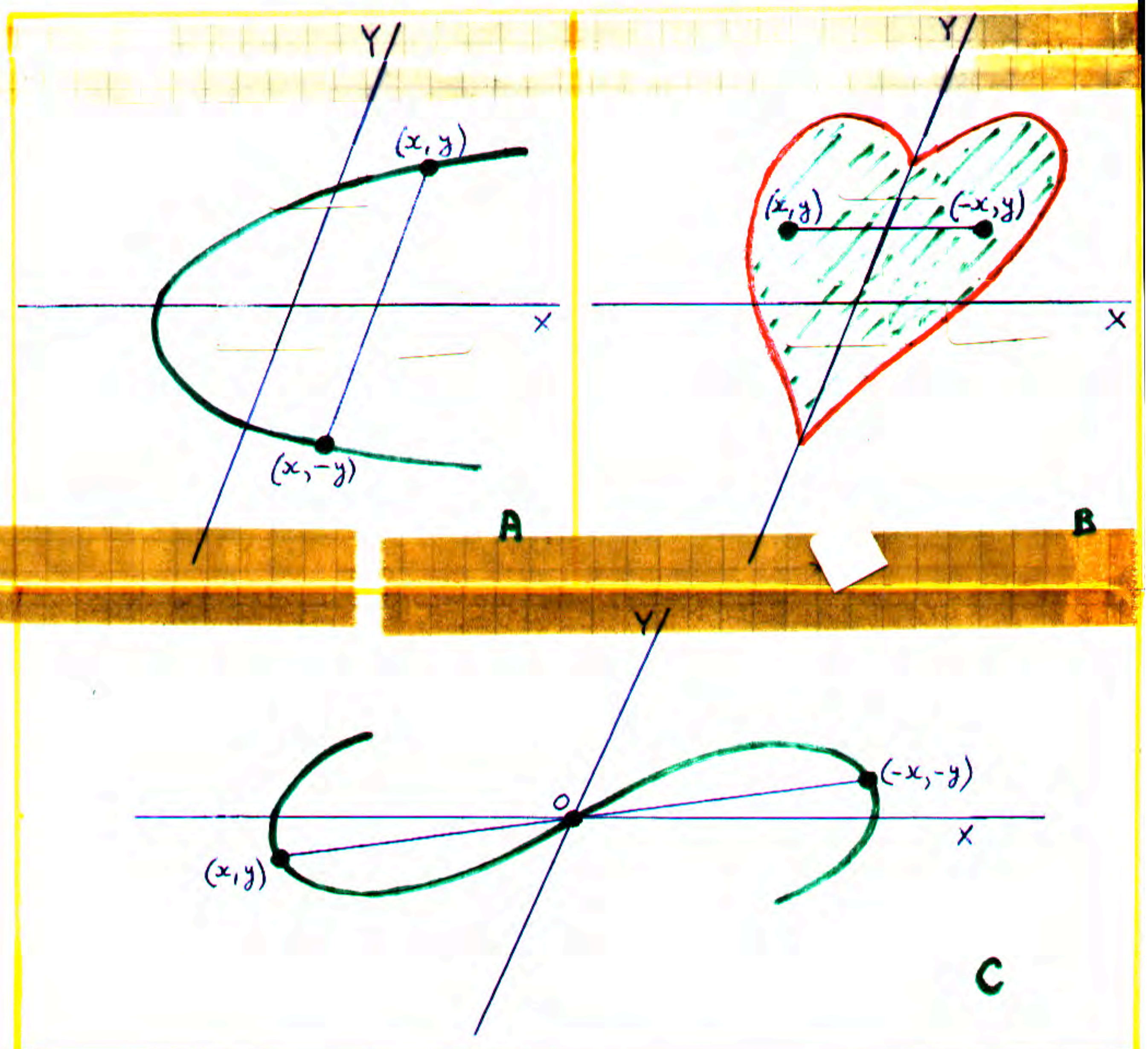
Dans ce paragraphe,

une base $(\vec{e}, \vec{u})$ a été fixée dans Π_0

les droites oe et ou sont notées X et Y

Voici des relations dans $\mathbb{R}$

dans les dessins remplacer x par a, y par b



X est axe de symétrie (parallèle à Y) de A

Y est axe de symétrie (parallèle à X) de B

o est centre de symétrie de C

Nous avons introduit les définitions naturelles

A, relation dans $\mathbb{R}$

1

X est <u>axe de symétrie</u> (parallèle à Y) de A

<u>ssi</u>

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x,y) \in A \Leftrightarrow (x,-y) \in A$

2

Y est <u>axe de symétrie</u> (parallèle à X) de A

<u>ssi</u>

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x,y) \in A \Leftrightarrow (-x,y) \in A$

3

o est <u>centre de symétrie</u> de A

<u>ssi</u>

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x,y) \in A \Leftrightarrow (-x,-y) \in A$

<u>Exercices</u>

1. Exercices de la fin du paragraphe précédent :
examine, pour chacune des relations étudiées,
si X, Y en sont des axes de symétrie,
si o en est un centre de symétrie.
2. Dessine des relations très <u>variées</u>, définies dans $\mathbb{R}$, qui admettent
1) X comme axe de symétrie, et pas Y
2) Y comme axe de symétrie, et pas X
3) X et Y comme axes de symétrie
4) o comme centre de symétrie, et ni X, ni Y comme axes de symétrie
5) o comme centre de symétrie et X comme axe de symétrie
6) o comme centre de symétrie et Y comme axe de symétrie

As-tu des remarques à faire ?

3. Les relations

$$y = x$$
$$y = x^2$$
$$y = x^3$$

admettent-elles un axe ou un centre de symétrie ?

4. $s_X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (x,-y)$ est la symétrie d'axe X, parallèle à Y

$s_Y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (-x,y)$ est la symétrie d'axe Y, parallèle à X

$s_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (-x,-y)$ est la symétrie de centre 0

La définition 1 s'énonce encore

A, relation dans $\mathbb{R}$

X est axe de symétrie (parallèle à Y) de A

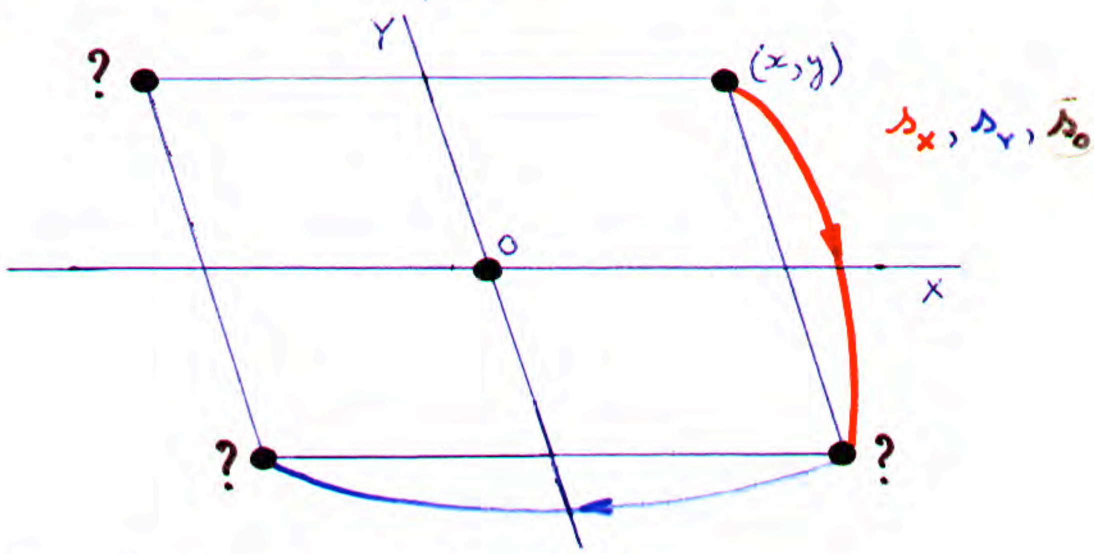
ssi

$$s_X A = A$$

Donne des énoncés analogues pour les définitions 2 et 3

Justifie mentalement ta réponse.

5.



Dessine des flèches du graphe de s_0

6. $\{1_{\mathbb{R}^2}, s_X, s_Y, s_0\}, \circ$ est un Vierergruppe de Klein

7. <u>Si</u> A est une relation dans $\mathbb{R}$

X est axe de symétrie (parallèle à Y) de A

Y est axe de symétrie (parallèle à X) de A

<u>Alors</u> o est centre de symétrie de A

8. <u>Si</u> A est une relation dans $\mathbb{R}$

X est axe de symétrie (parallèle à Y) de A

o est centre de symétrie de A

<u>Alors</u> . . .

9. Dans les définitions 1, 2, 3 il aurait été loisible de remplacer chacun des signes $\Longleftrightarrow$ par $\Rightarrow$ ou par $\Leftarrow$.

3 Bases orthonormées de Π_o

4 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, base de Π_o

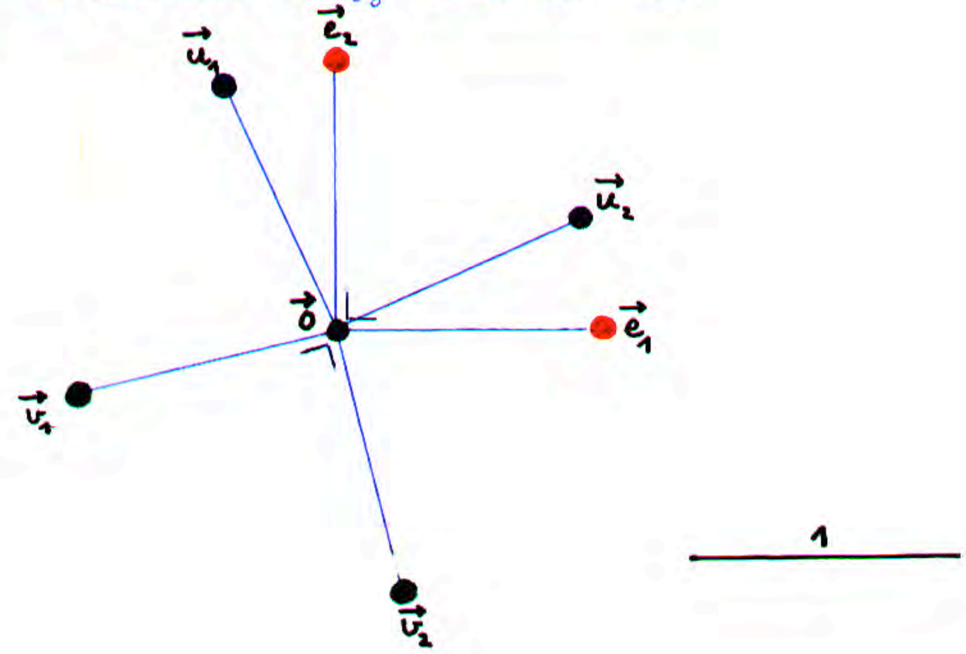
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de Π_o

ssi

1. $d(o, e_1) = 1 = d(o, e_2)$
2. $oe_1 \perp oe_2$

le plan π est muni d'une unité

Voici six bases orthonormées de Π_o. Enumère-les !



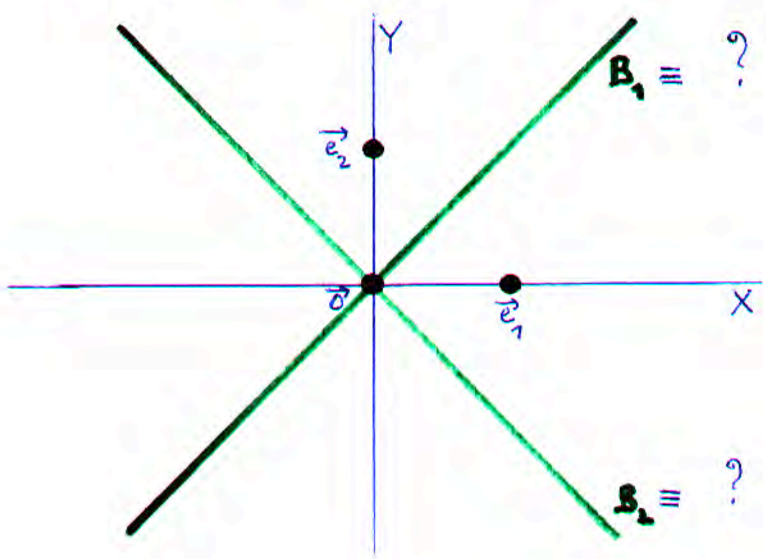
Exercices

Toutes les bases (utilisées ci-dessous) sont orthonormées.

1. Pour toute base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de Π_o :

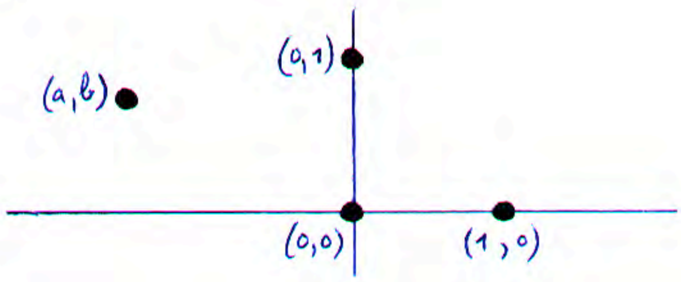
$$e_1, e_2 \in \Gamma(o,1) = \{ x \in \pi \mid d(o,x) = 1 \}$$

2.



où B_1, B_2 sont les bissectrices des couples de demi-droites d'origine o, incluses respectivement dans X et Y

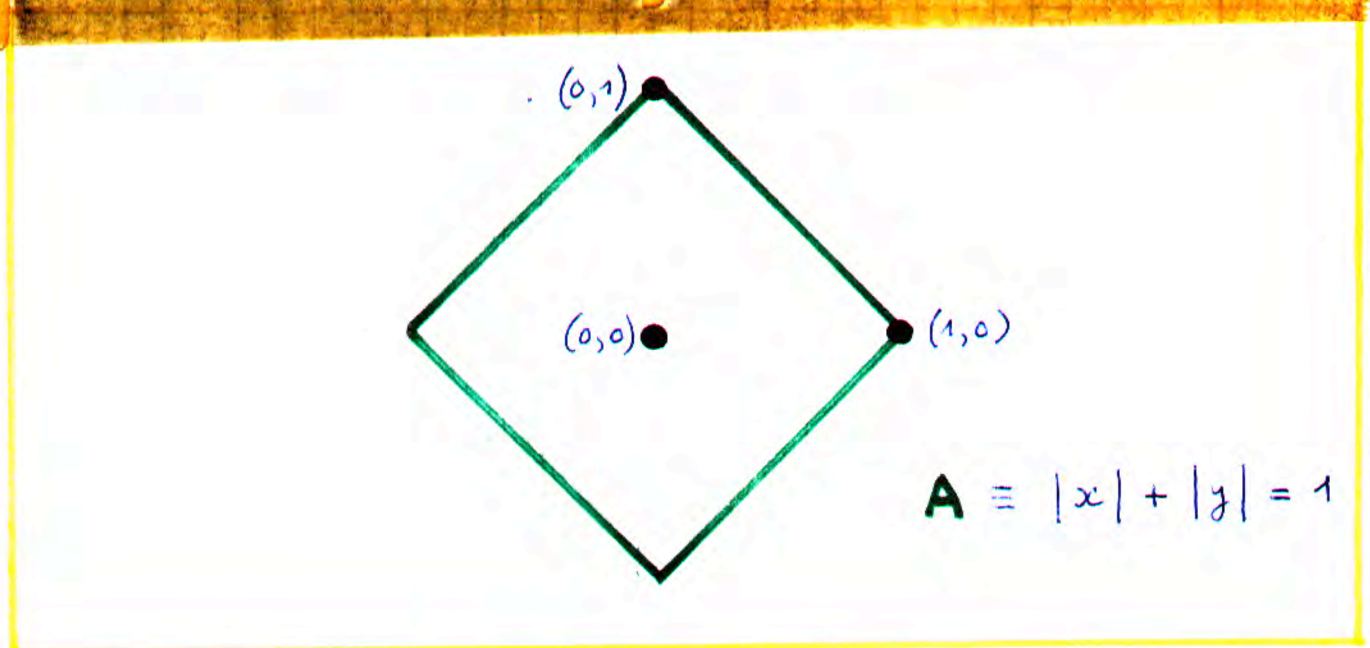
3.

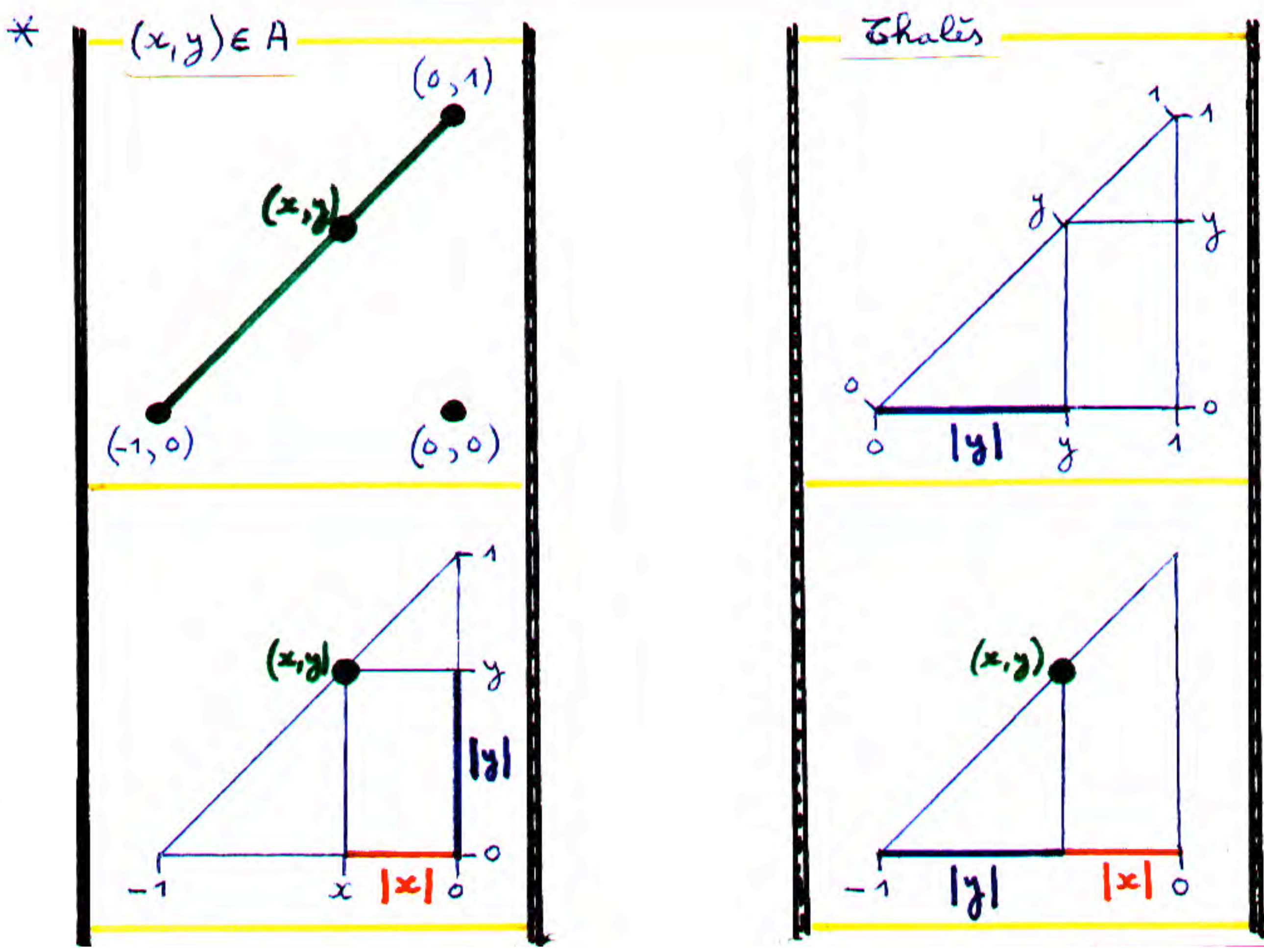


Dessine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |a| \wedge |y| = |b|\}$

4. Dessine quelques points de la relation $A \equiv |x| + |y| = 1$

5.

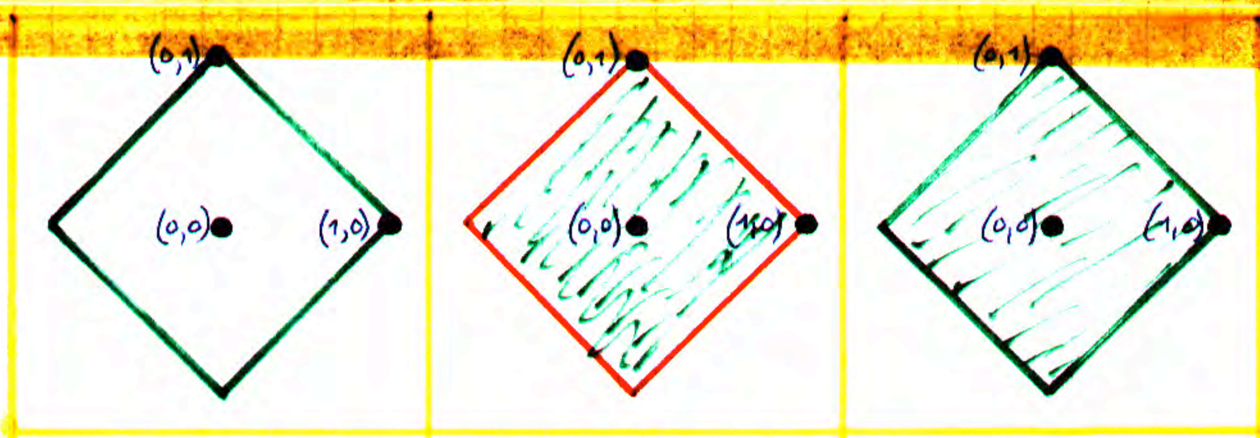




Centre et axes de symétrie de la relation A ?

6. En base orthonormée, la relation $|x|+|y|=1$ est le bord d'un carré.

7.

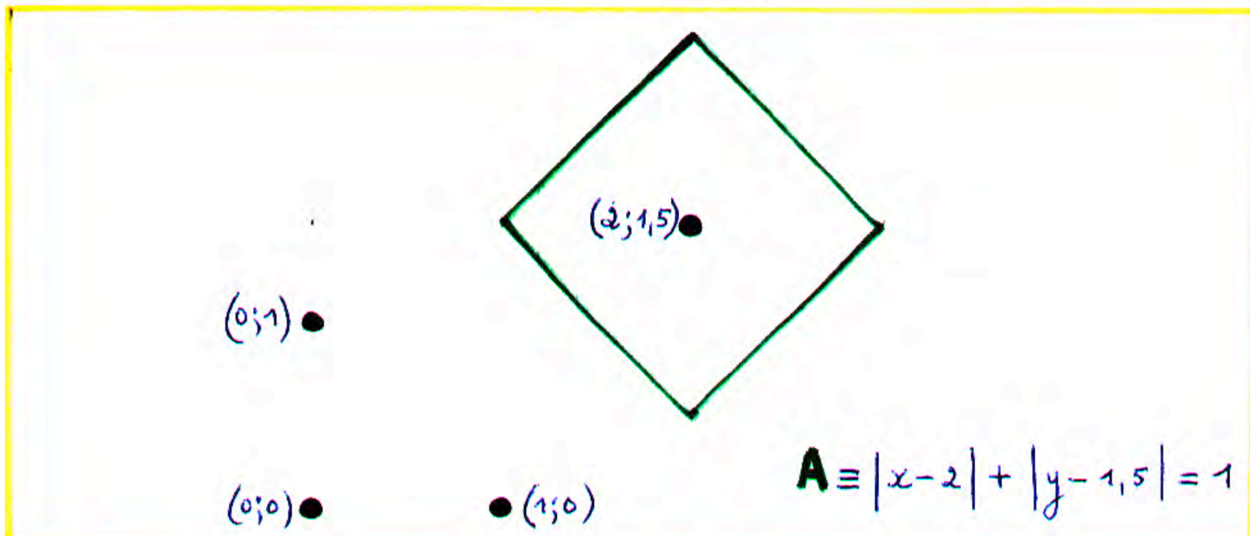


$\mathbf{A} \equiv |x|+|y|=1$	$\mathbf{B} \equiv |x|+|y|<1$	$\mathbf{C} \equiv |x|+|y|\leqslant 1$

8. Dessine $P \equiv |x|+|y|<3,5$

9. Dessine $Q \equiv |x|+|y|>2$

10.



11. Dessine $R \equiv |x+2|+|y-3| \geqslant 1,5$

12. $\max\{2;3\}=3$

$\max\{-10;-9\}=-9$

$\max\left\{\frac{35}{6};\frac{36}{7}\right\}=\frac{35}{6}$

$\max\left\{\frac{3}{4};0,75\right\}=\frac{3}{4}=0,75$

Définis $\max\{a,b\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$

13. Dessine quelques éléments de $A \equiv \max\{x,y\}=x$

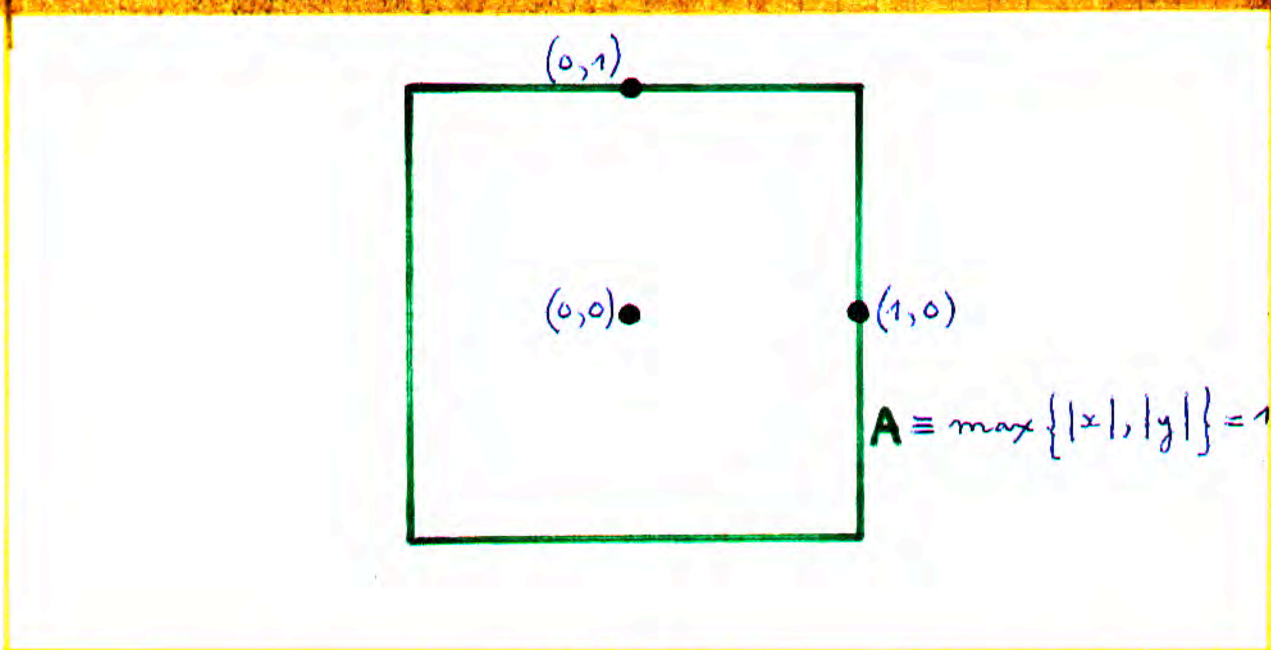
Dessine A

14. Même question : $B \equiv \max\{|x|,|y|\} = |x|$

15. Même question : $C \equiv \max\{x, y\} = 1$

16. Même question : $D \equiv \max\{|x|,|y|\} = 1$

17. Réponse à l'exercice 16 :

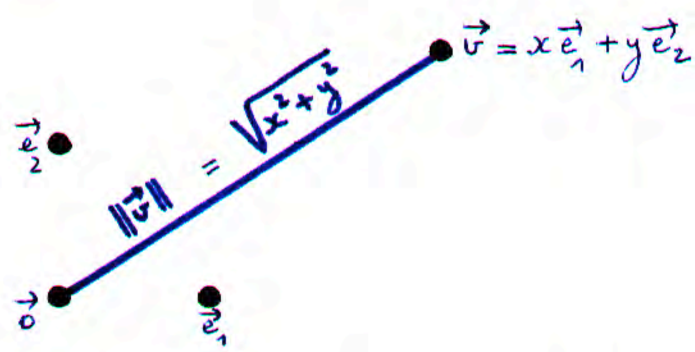


18. En base orthonormée, la relation $\max\{|x|,|y|\} = 1$ est le bord du carré dessiné ci-dessus.

19. Que peux-tu dire de la relation $\max\{|x|,|y|\} = 1$, dans **le cas où π_0 est muni d'une base quelconque ?**

4 Dans le vectoriel euclidien plan

En base orthonormée :

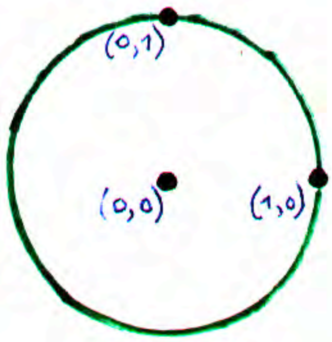
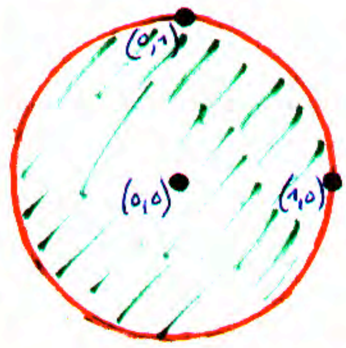
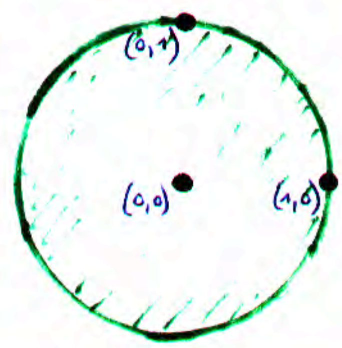


$$\text{Cercle de centre } \vec{o} \text{ et rayon } 1 = \left\{ \vec{v} \in \pi_0 \;\middle|\; \|\vec{v}\| = 1 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} = 1 \right\}$$

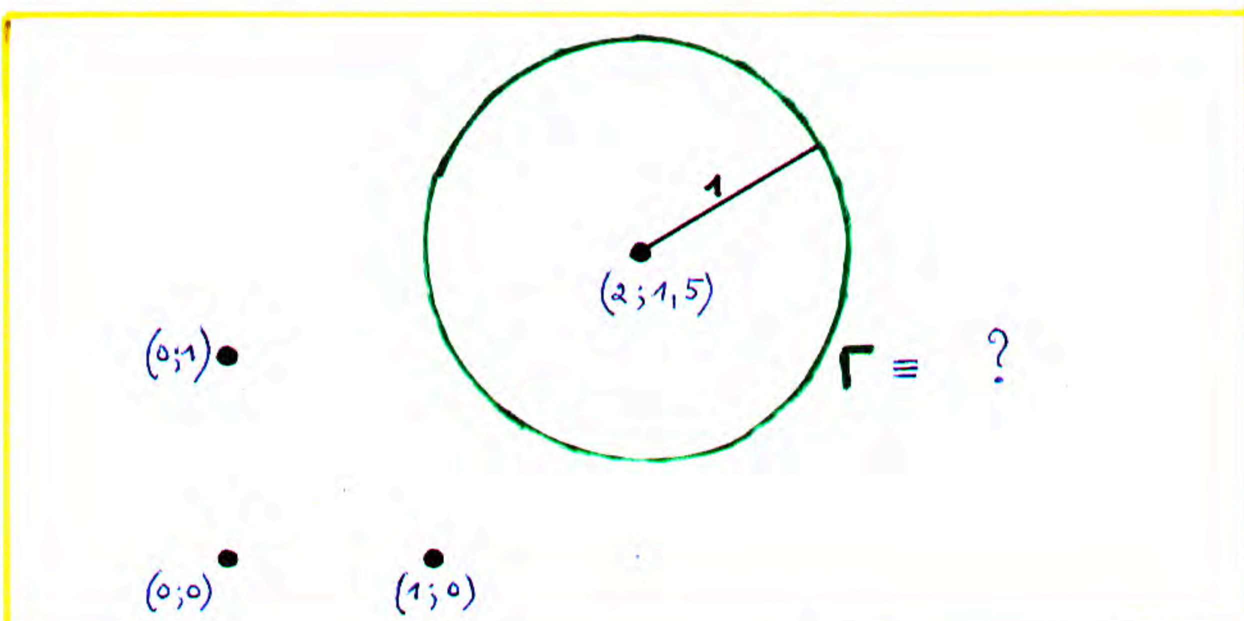
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1 \right\}$$

En base orthonormée :

Cercle de centre $\vec{o}$ et de rayon 1	Disque ouvert de centre $\vec{o}$ et de rayon 1	Disque fermé de centre $\vec{o}$ et de rayon 1
		
$\Gamma(0,1) \equiv x^2+y^2=1$	$\Delta(0,1) \equiv x^2+y^2<1$	$\overline{\Delta}(0,1) \equiv x^2+y^2\leqslant 1$

<u>Exercices</u>

Bases orthonormées.

1. $\Gamma(0;3) \equiv$?
2. $\Gamma(0,\sqrt{2}) \equiv$?
3. 

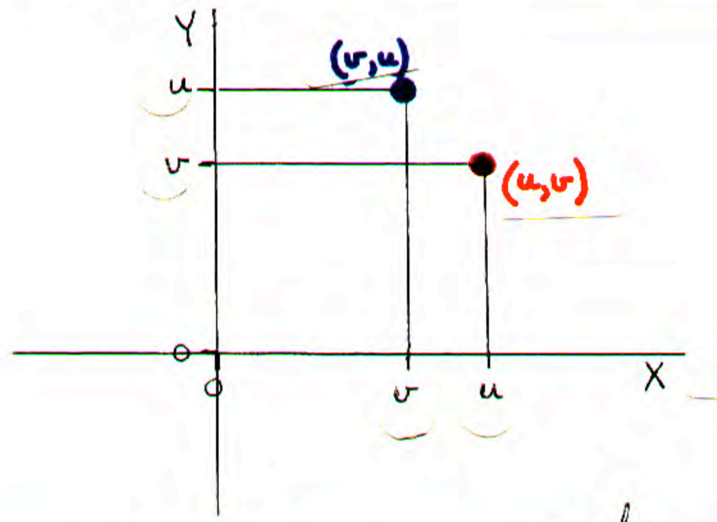
4. Dessine $A \equiv (x+2)^2+(y-1)^2 > 4$

5. Relations réciproques

Pour toute relation A :

$$(u,v) \in A \quad \text{ssi} \quad (v,u) \in A^{-1}$$

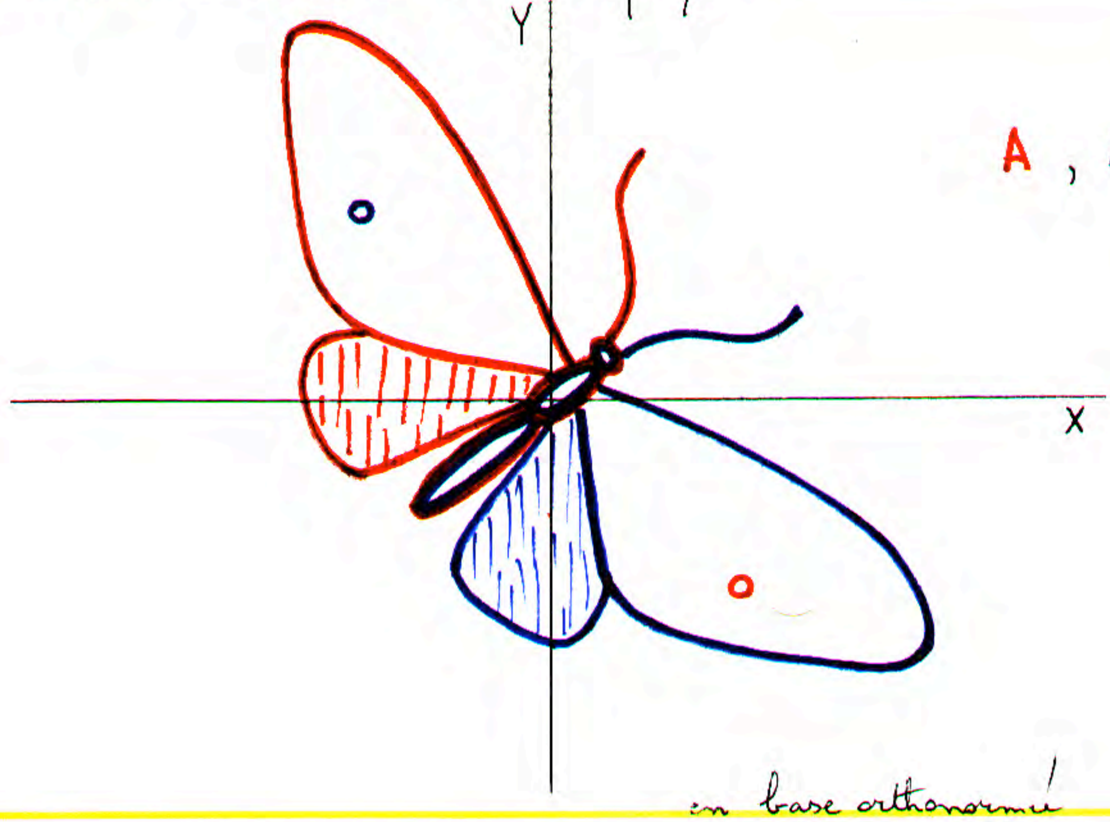
Pour toute relation A dans $\mathbb{R}$:



A , A^{-1}

en base orthonormée

Une relation A dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque :



A , A^{-1}

aplats rouge et bleu

en base orthonormée

Exercices   En base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

1. Dessine une relation A dans $\mathbb{R}$, et sa réciproque, telles que
$$A \cap A^{-1} = \emptyset$$
2. Dessine une relation A dans $\mathbb{R}$ telle que
$$A = A^{-1}$$
3. **Si** A est une relation dans $\mathbb{R}$
B est la bissectrice de $([oe_1, [oe_2)$

Alors A et A^{-1} sont réciproques l'une de l'autre

ssi

$$s_B A = A^{-1}$$

ssi

$$s_B A^{-1} = A$$

(où s_B est la symétrie orthogonale d'axe B).

Aide-toi, éventuellement, de certaines propriétés démontrées dans [mm2, chap. 21].

4. **Si** A est une relation dans $\mathbb{R}$
B est la bissectrice de $([oe_1, [oe_2)$

Alors $A = A^{-1}$

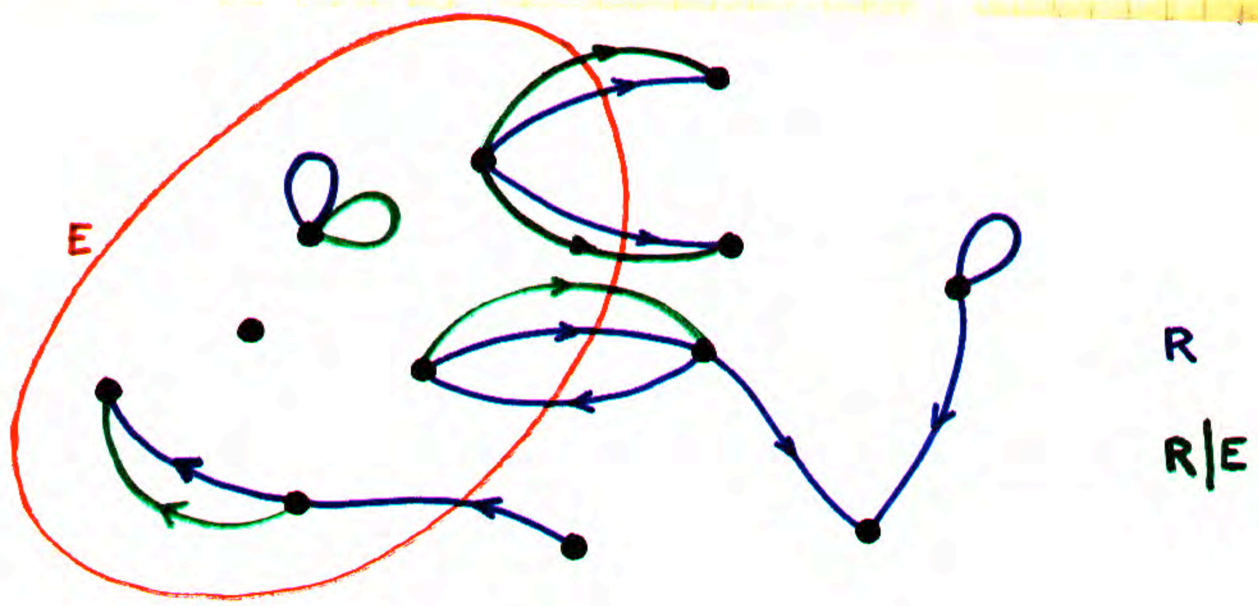
ssi

$$s_B A = A$$

6 Restriction d'une relation

Voici le graphe d'une relation R

et de sa restriction à l'ensemble E



5

Restriction de la relation R à l'ensemble E

= ensemble des couples de R dont l'origine appartient à E

La restriction de la relation R à l'ensemble E est notée R|E

Exercices

1. $R|E = \{(x,y) \in R \mid x \in E\}$

2. Pour toute relation R, pour tout ensemble E :

$$R|E \subset R$$

$$R|E = R \circ 1_E$$

3. R = " ... est enfant de ... "

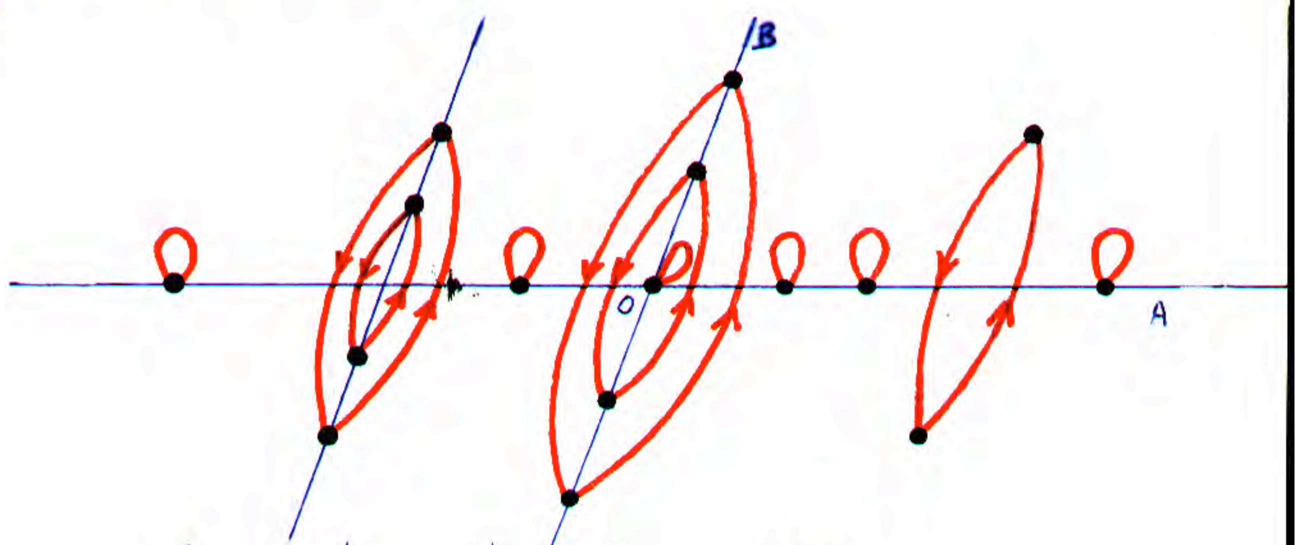
Restriction de R à l'ensemble des personnes de sexe féminin,

à l'ensemble des personnes de sexe masculin ?

4. f est la fonction "valeur absolue".
Restrictions de f à $\mathbb{R}^+$, à $\mathbb{R}^-$?

5. f est la fonction "partie entière".
Restriction de f à $\mathbb{Z}$?

*6   4.



s est la symétrie d'axe A, parallèle à B

$s|A =$ $s|B =$

7. $A \equiv |x| + |y| = 1$ (cf exercice, page)

$A \,|\, [-1;1] =$ $A \,|\, \{0\} =$

$A \,|\, [1;2$ $=$ $A \,|\, \{1\} =$

8. Peperbol a découvert deux théorèmes importants dont il est très fier

1) La restriction de toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ à un singleton est croissante et décroissante.

2) La restriction de toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ à une paire est croissante ou décroissante.

9. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

f est croissante (resp. décroissante)

ssi

les restrictions de f à toutes les paires de son domaine sont croissantes (resp. décr.)

X   10. En l'exercice 6 : $s|A = 1_A$