8

Fonctions polynômes

1. Définition

Une première étude des fonctions polynomes, reprise ici, fait l'objet d'une annexe dans [mm2].

Ces fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$x \longmapsto -5x+2$ $\qquad$ $x \longmapsto 6$

$x \longmapsto 3{,}5x^2-4x+0{,}2$ $\qquad$ $x \longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$

$x \longmapsto 7x^5-2x^3-3$ $\qquad$ $x \longmapsto x^9-x^8+x^7-x^6+x^5$

sont des fonctions polynomes (de $\mathbb{R}$).

1 $\qquad$ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\,;\ n \in \omega$

f est une fonction polynome (de $\mathbb{R}$)

ssi

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Nous la notons $\qquad \ulcorner a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \lrcorner$

$[\mathbb{R}]$ = ensemble des fonctions polynomes

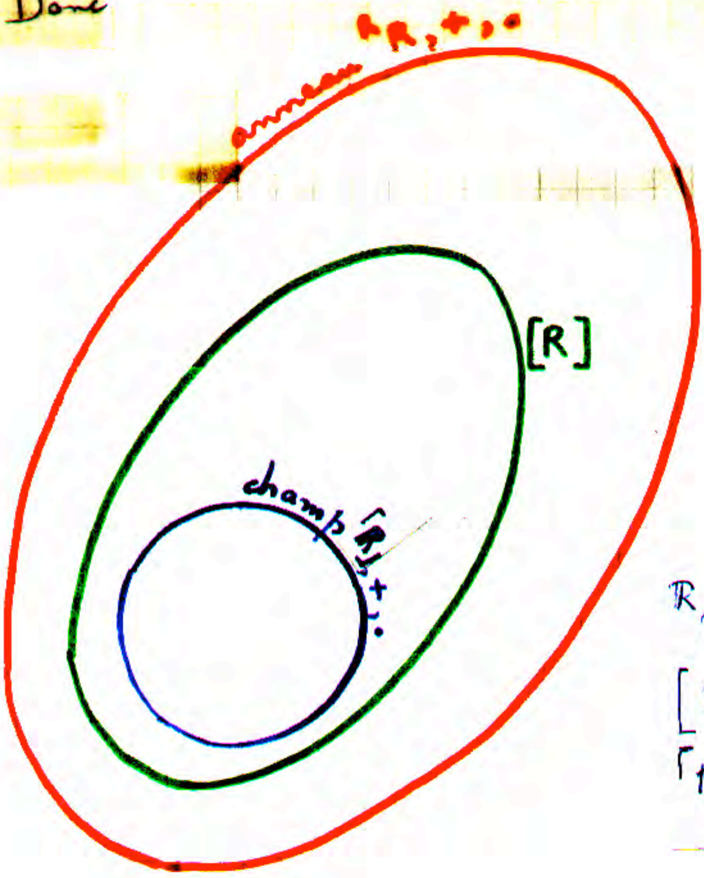
$\ulcorner \mathbb{R} \lrcorner$ = ensemble des transformations constantes de $\mathbb{R}$

Pour tout ensemble E non vide

${}^{E}\mathbb{R},+,\cdot$ est un anneau commutatif unifère,

l'ensemble des fonctions constantes de E dans $\mathbb{R}$ est un champ.

Donc



${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ = ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$[\mathbb{R}]$ = ensemble des fonctions polynomes de $\mathbb{R}$

$\ulcorner\mathbb{R}\lrcorner$ = ensemble des transformations constantes de $\mathbb{R}$

Exercices

1. Veux-tu représenter par un point, dans le diagramme précédent, chacune des fonctions présentées ci-dessus.
2. Sur ce diagramme ~~précédent~~, ajoute la corde de

$\mathcal{S}\mathbb{R}$ = ensemble des permutations de $\mathbb{R}$

Marques-y les fonctions

$\ulcorner 0 \lrcorner$, $\ulcorner x \lrcorner$, $\ulcorner 1 \lrcorner$, $1_{\mathbb{R}}$

Présente plusieurs éléments de chacune des plages non vides de ce diagramme.

3. Dans le diagramme précédent, situe les fonctions

$$\ulcorner 3 \lrcorner \quad , \quad \ulcorner 2x-4 \lrcorner \quad , \quad \ulcorner x^2 \lrcorner$$

ainsi que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$

et la fonction g défini par $f(x) = x$

sauf $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$

4. Valeurs de

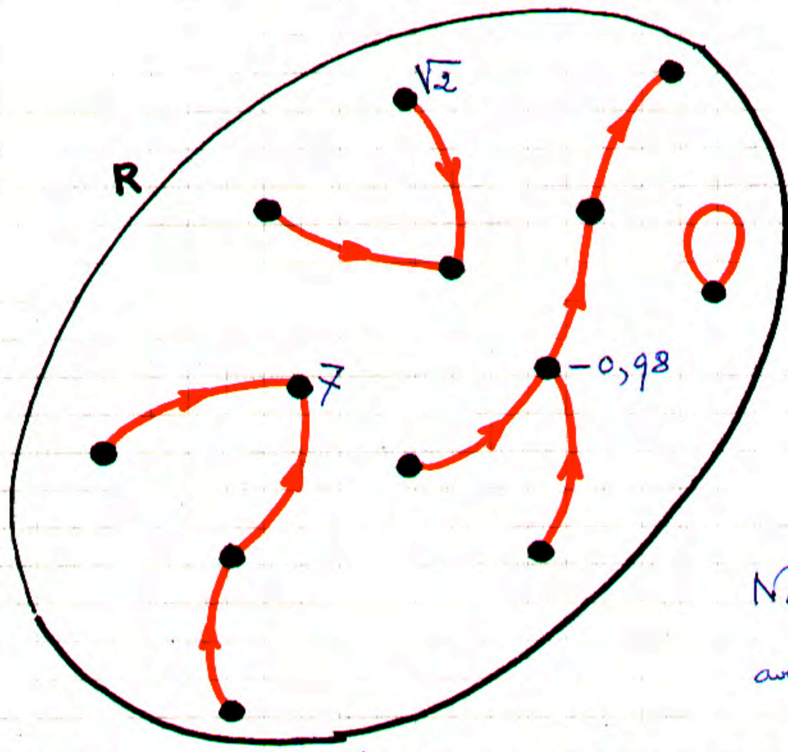
$$f = \ulcorner -3x + \tfrac{1}{2} \lrcorner \quad , \quad g = \ulcorner x^2 - 5x + 6 \lrcorner \quad , \quad h = \ulcorner x^7 - x^5 + 2x \lrcorner$$

en 0 ; 1 ; -3 ; $\frac{1}{2}$; $-0{,}3$; a ; a^2 ; a^{-3} ? $(a \in \mathbb{R}_0)$

Calcule $f+g$ $\quad g-h \quad f \cdot h$

$g+h \quad h-f \quad g \cdot h$

5.



$\ulcorner 2x^2 - 1 \lrcorner$

Nombres compatibles avec ce graphe ?

6. Domaines des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$\sqrt{x} \qquad \sqrt{x-1}$

$\sqrt{|x|} \qquad \sqrt{(x-1)^2}$?

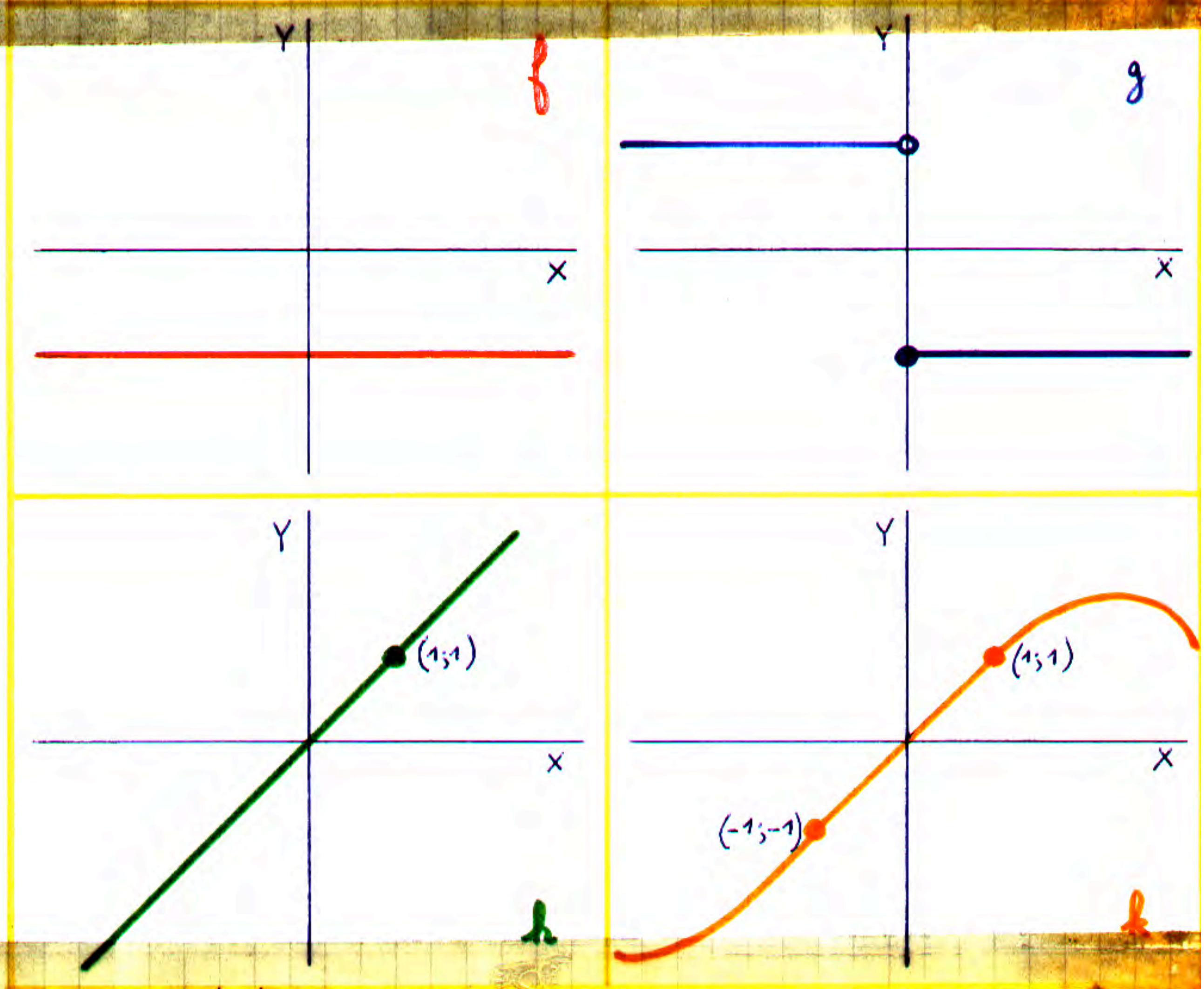
7. Même question qu'en l'ex 3 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$\sqrt{|x|} \qquad \sqrt{x^2+1}$

$\sqrt{x^2} \qquad \sqrt{(x^2+1)^2}$

$\sqrt{2} \qquad \sqrt{x^4}$

8. Même question qu'en l'ex 3



2. Addition et multiplication des fonctions polynomes

En l'ex 4, tu as calculé somme, produit, différence de fonctions polynomes.

> **1** Somme, produit et différence de fonctions polynomes sont polynomes.

Ainsi $[\mathbb{R}]$ se trouve muni d'une addition, d'une multiplication et d'une différence hérités de $^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ avec leurs propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité.

De plus

- le neutre de $^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+$
- l'opposé d'une fonction polynome
- l'unité de l'anneau $^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+,\cdot$

sont des fonctions polynomes.

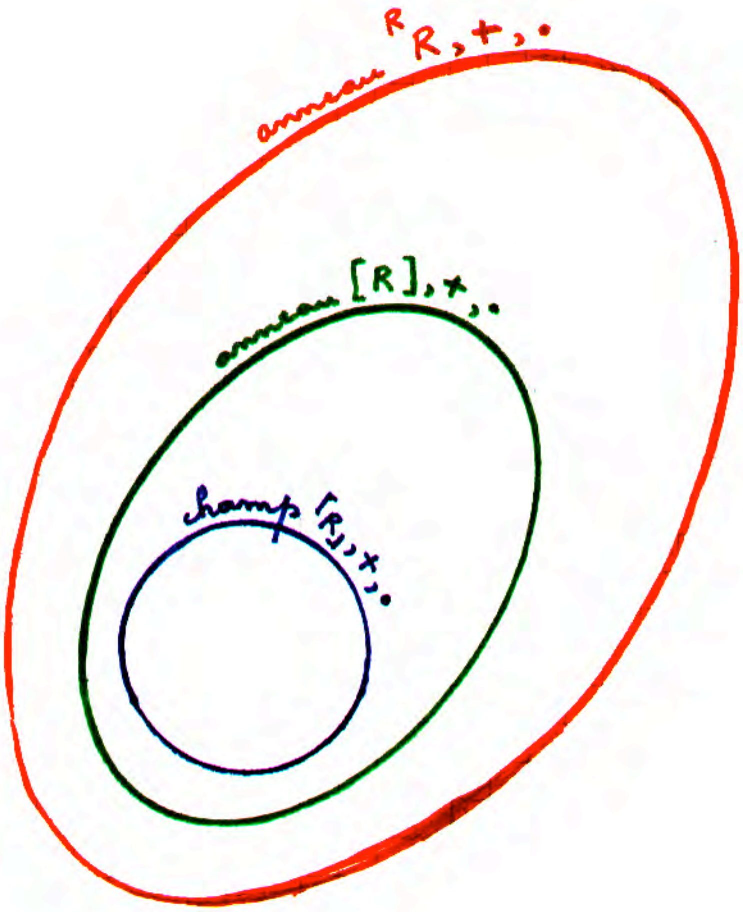
2

$[\mathbb{R}],+,\cdot$ est un anneau commutatif unifère.

En résumé

1

$[\mathbb{R}]$ est un sous-anneau unifère,
$\ulcorner\mathbb{R}\lrcorner$ est un sous-champ
de l'anneau commutatif unifère $^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+,\cdot$



Exercices

9. Calcule $\ulcorner a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \lrcorner + \ulcorner b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \lrcorner$

$\ulcorner a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \lrcorner \cdot \ulcorner b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \lrcorner$

Dans quelle structure as-tu effectué les calculs ?

Quelles propriétés as-tu appliquées ?

10. Dans le groupe $[\mathbb{R}], +$ résouds les équations en y

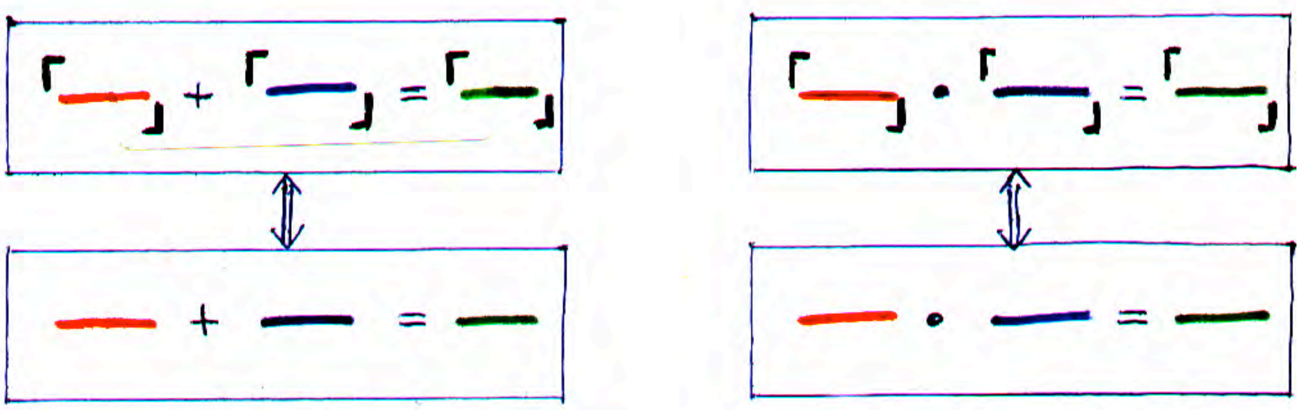
$$f + y = g$$
$$g - y = h$$
$$f + y - h = \ulcorner 3 \lrcorner$$

où $f = \ulcorner -3x^2 + 2x \lrcorner$, $g = \ulcorner 4x^3 - 2x + 1 \lrcorner$, $h = \ulcorner -5x^2 \lrcorner$

10. $\ulcorner 2x+3 \lrcorner + \ulcorner 4x-5 \lrcorner = \ulcorner 6x-2 \lrcorner$ $\Updownarrow$ $(2x+3)+(4x-5) = 6x-2$

$\ulcorner x-2 \lrcorner \cdot \ulcorner x+2 \lrcorner = \ulcorner x^2-4 \lrcorner$ $\Updownarrow$ $(x-2)\cdot(x+2) = x^2-4$

11.



vert = mauve

12. $\ulcorner x-1 \lrcorner \cdot \ulcorner x+1 \lrcorner =$

$\ulcorner x-3 \lrcorner \cdot \ulcorner x^2+3x+9 \lrcorner =$

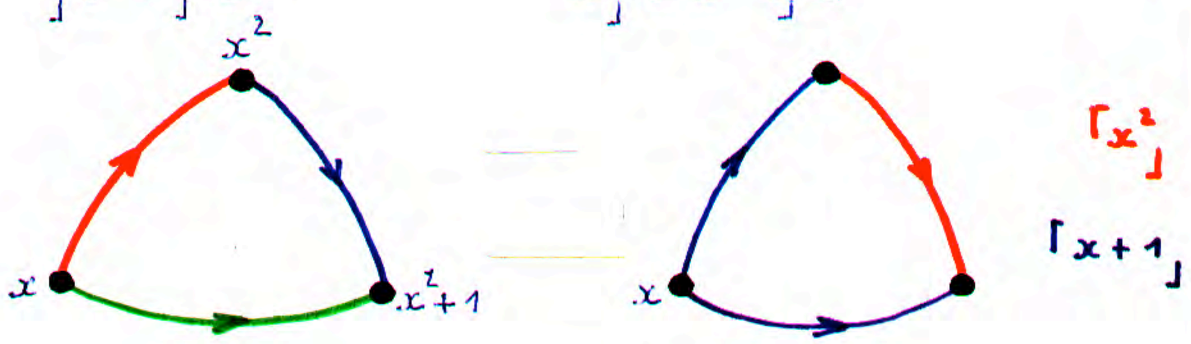
$\ulcorner x-a \lrcorner \cdot \ulcorner x^3+ax^2+a^2x+a^3 \lrcorner =$

$\ulcorner x-a \lrcorner \cdot \quad \ldots \quad = \ulcorner x^n-a^n \lrcorner$ $(n \in \omega_0)$

13. $\ulcorner x^2 \lrcorner \cdot \ulcorner x^3 \lrcorner =$ $\qquad \ulcorner x^2 \lrcorner \circ \ulcorner x^3 \lrcorner =$

14. $\ulcorner x^2+1 \lrcorner \cdot \ulcorner x^2 \lrcorner =$ $\qquad \ulcorner x^2 \lrcorner \cdot \ulcorner x^2+1 \lrcorner =$

vert = noir



$\ulcorner x+1 \lrcorner \circ \ulcorner x^2 \lrcorner =$ $\qquad \ulcorner x^2 \lrcorner \circ \ulcorner x+1 \lrcorner =$

15. $\forall f \in [\mathbb{R}]$: $\quad f \cdot \ulcorner 1 \lrcorner =$ $\qquad f \circ \ulcorner 1 \lrcorner =$

$\ulcorner 1 \lrcorner \cdot f =$ $\qquad \ulcorner 1 \lrcorner \circ f =$

16. Dessine un diagramme de Venn des ensembles

$$\mathcal{S}\mathbb{R},\ {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R},\ [\mathbb{R}],\ [\mathbb{R}]_1,\ \ulcorner\mathbb{R}\lrcorner$$

où $[\mathbb{R}]_1$ = ensemble des fonctions $\ulcorner ax+b \lrcorner$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$ et présente un élément de chacune des plages non vides de ce diagramme.

17. La fonction $\ulcorner ax+b \lrcorner$ est une permutation de $\mathbb{R}$

<u>ssi</u>

$a \in \mathbb{R}_0$

18. Examine si l'addition, la multiplication, la composition sont des lois internes et partout définies dans $[\mathbb{R}]_1$

19. $[\mathbb{R}]_1, +$ $\quad$ $[\mathbb{R}]_1, \circ$ $\quad$ sont-ils des groupes ?

20. Mêmes questions qu'en l'ex 18 pour l'ensemble des permutations $\ulcorner ax+b \lrcorner$ de $\mathbb{R}$

11. L'ensemble des permutations $\ulcorner ax+b \lrcorner$ de $\mathbb{R}$ est un groupe commutatif pour la composition.

12. Calcule l'inverse de $\ulcorner 3x-7 \lrcorner$ dans ce groupe (cf ex 11)

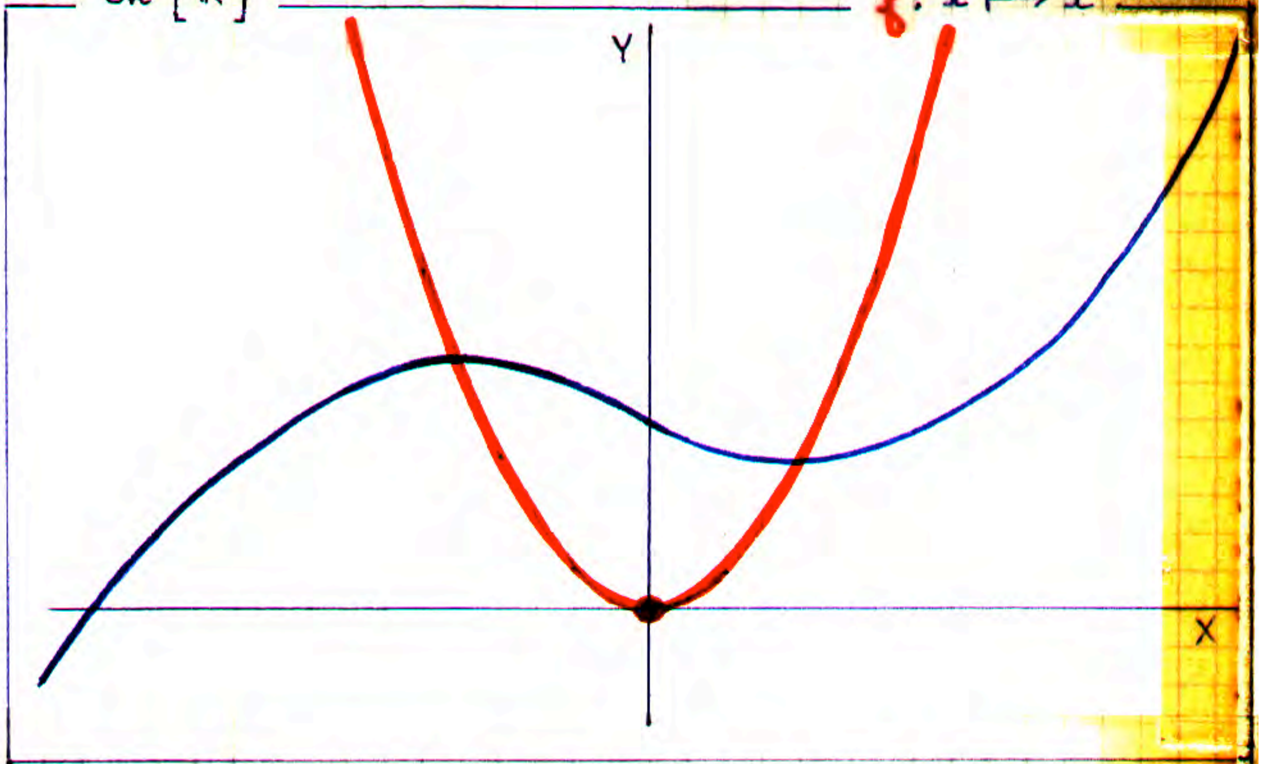
13. Dans ce groupe (cf ex 11) résouds l'équation en y

$$f \circ y = g$$

où $\quad f = \ulcorner -5x+1 \lrcorner \quad , \quad g = \ulcorner 2x+6 \lrcorner$

14. $[\mathbb{R}], \circ$ n'est pas un groupe.

15. en $[\mathbb{R}]$ $\quad$ $f : x \longmapsto x^2$



$f \neq \ulcorner 0 \lrcorner$ et $\forall\, g \neq \ulcorner 0 \lrcorner$ $\quad f \cdot g \neq \ulcorner 1 \lrcorner$

16. $[\mathbb{R}], +, \cdot$ n'est pas un champ.

17. On établira plus tard que $[\mathbb{R}], +, \cdot$ n'admet pas de facteurs de zéro non nuls.
L'examen de l'ensemble des facteurs de zéro non nuls de $[\mathbb{R}], +, \cdot$ ne permet pas de conclure que $[\mathbb{R}], +, \cdot$ n'est pas un champ.

3 Divisibilité dans $[\mathbb{R}]$

$f, g \in [\mathbb{R}]$

$$\boxed{f \mid g \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in [\mathbb{R}] : \quad g = f \cdot q}$$

La formule " $f \mid g$ " se lit " f divise g ". De même, la terminologie introduite dans $\mathbb{Z}, \mid$ est utilisée ici : f est diviseur de g, g est multiple de f, q est le quotient de la division de g par f (dans le cas où $f \neq \ulcorner 0 \lrcorner$).

EX $\ulcorner 2x+3 \lrcorner \mid \ulcorner 8x^3 - 6x + 18 \lrcorner$

puisque $\ulcorner 8x^3 - 6x + 18 \lrcorner = \ulcorner 2x+3 \lrcorner \cdot \ulcorner 4x^2 - 6x + 6 \lrcorner$

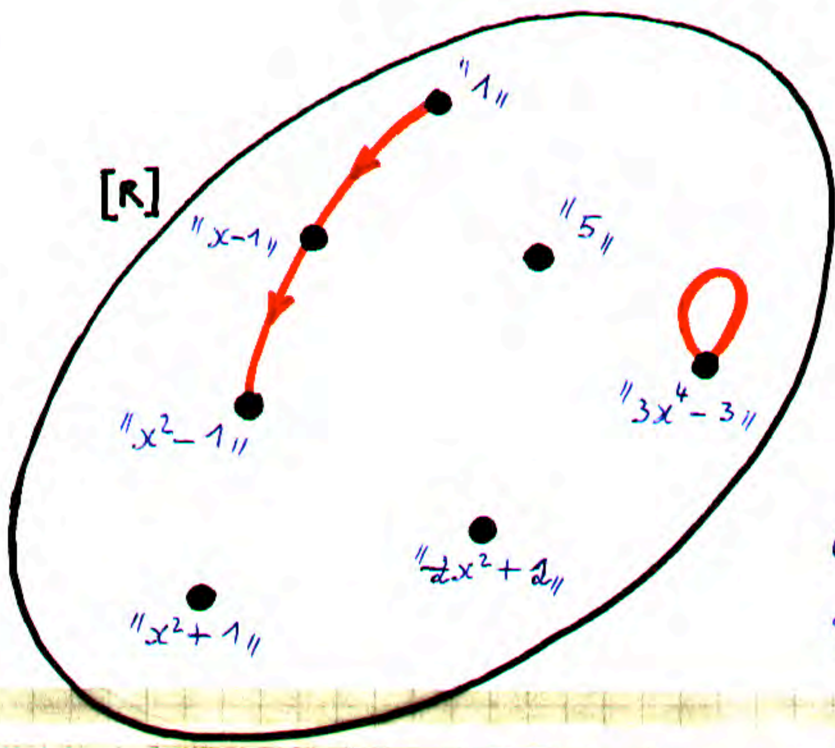
et $\ulcorner 4x^2 - 6x + 6 \lrcorner \in [\mathbb{R}]$

EX $\ulcorner 2x - 8 \lrcorner \mid \ulcorner -5x + 20 \lrcorner$

puisque $\ulcorner -5x + 20 \lrcorner = \ulcorner 2x - 8 \lrcorner \cdot \ulcorner -\frac{5}{2} \lrcorner$ et $\ulcorner -\frac{5}{2} \lrcorner \in [\mathbb{R}]$

esp normal (EX $\ulcorner -\frac{5}{2} \lrcorner \mid \ulcorner -5x + 20 \lrcorner$ puisque ...

4.

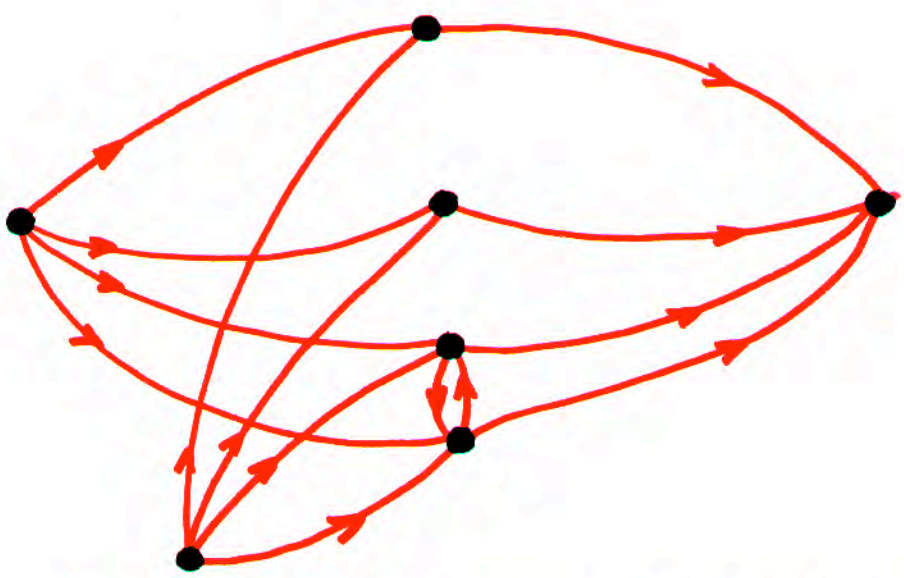


$\mid$

Complète ce graphe partiel de "divise"

5. La relation $\mid$ dans $[\mathbb{R}]$ est réflexive et transitive.
6. La relation $\mid$ dans $[\mathbb{R}]$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.
7. La relation $\mid$ dans $[\mathbb{R}]$ n'est pas un ordre.

8.



$\mid$

Marque des fonctions polynomes compatibles avec ce graphe partiel de $\mid$ dans $[\mathbb{R}]$. Toutes les flèches sont dessinées !

9. $\forall f \in [\mathbb{R}]$: $\ulcorner 1 \lrcorner \mid f$ et $f \mid \ulcorner 0 \lrcorner$

10. $\ulcorner 0 \lrcorner \mid f \in [\mathbb{R}] \quad \Rightarrow \quad f = \ldots$

11. Toute fonction constante non nulle divise toute fonction polynôme.

12. $\ulcorner 3x^2 \lrcorner \mid \ulcorner x^6 - 4x^4 + 6x^2 \lrcorner$

puisque $\ulcorner x^6 - 4x^4 + 6x^2 \lrcorner = \ulcorner 3x^2 \lrcorner \cdot \ulcorner \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 2 \lrcorner$

$\ulcorner \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 2 \lrcorner$ est le quotient de la division de $\ulcorner x^6 - 4x^4 + 6x^2 \lrcorner$ par $\ulcorner 3x^2 \lrcorner$

13. Calcule le quotient

de $\ulcorner 25x^{12} \lrcorner$	par	$\ulcorner 10x^4 \lrcorner$	
$\ulcorner a^2x^n \lrcorner$		$\ulcorner ax^3 \lrcorner$	$(a \in \mathbb{R}_0 ; n \in W$ et $n \geqslant 3)$
$\ulcorner x^7 - 6x^5 - 8x^4 \lrcorner$		$\ulcorner x^4 \lrcorner$	
$\ulcorner -8x^9 + 6x^7 - x^3 + 4x^2 \lrcorner$		$\ulcorner -4x^2 \lrcorner$	
$\ulcorner x^6 - 7 \lrcorner$		$\ulcorner 3 \lrcorner$	
$\ulcorner a^2x^4 + a^3x^3 - a^4x^2 \lrcorner$		$\ulcorner ax \lrcorner$	$(a \in \mathbb{R}_0)$
$\ulcorner a^2b^2x^7 - a^3bx^5 \lrcorner$		$\ulcorner ab^2x^3 \lrcorner$	$(a, b \in \mathbb{R}_0)$
$\ulcorner 12x^n - x^{n-1} + x^{n-3} \lrcorner$		$\ulcorner x^{n-4} \lrcorner$	$(n \in W$ et $n \geqslant 4)$

14. Écris les fonctions polynomes que voici comme produits de fonctions polynomes :

$\ulcorner x^2 - 9 \lrcorner$	$\ulcorner x^2 + 2x + 1 \lrcorner$
$\ulcorner 4x^2 - 16 \lrcorner$	$\ulcorner 7x^2 - 42x + 63 \lrcorner$
$\ulcorner 0{,}01x^4 - 1{,}44x^2 \lrcorner$	$\ulcorner 2x(x^3 - 1) - 4x^2(x - 1) \lrcorner$
$\ulcorner x^2 - 7 \lrcorner$	$\ulcorner (x^2 - 3)^2 - (2x + 1)^2 \lrcorner$
$\ulcorner x^{13} - 1 \lrcorner$	$\ulcorner x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 \lrcorner$
$\ulcorner x^n - a^n \lrcorner$ $(a \in \mathbb{R} ; n \in W_0)$	$\ulcorner x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \lrcorner$

15. Complète les tableaux suivants, sachant que

$\ulcorner 4x^2 - 16 \lrcorner = f \cdot g$

f	g
$\ulcorner 4 \lrcorner$	
	$\ulcorner x - 2 \lrcorner$
$\ulcorner 2x + 4 \lrcorner$	
$\ulcorner \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \lrcorner$	

$\ulcorner 4x^2 - 16 \lrcorner = f \cdot g \cdot h$

f	g	h
$\ulcorner 4 \lrcorner$		
		$\ulcorner x + 2 \lrcorner$
	$\ulcorner 0{,}5x - 1 \lrcorner$	

16. $\forall f, g \in [\mathbb{R}] :$ $\quad f \mid f \cdot g$

Remplacer partout les guillemets par les petits crochets,
c.à.d. ″ ″ par ⌐ ⌙

4. Divisibilité par ″$x-a$″

Voici
$$f = ″3x^3 - 7x - 2″ \in [\mathbb{R}]$$
$$″3x^3 - 7x - 2″ = ″x-2″ \cdot ″3x^2+6x+1″ \quad \text{Vérifie!}$$
$$f(2) = (2-2)\cdot(3.2^2+6.2+1)$$
$$f(2) = 0$$

Autrement dit
$$″x-2″ \mid f \quad \Rightarrow \quad f(2)=0$$

Nous allons démontrer un théorème qui généralise – et enrichit – cette propriété.

2 — en $[\mathbb{R}]$

$$\boxed{″x-a″ \mid f} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{f(a)=0}$$

— de plus

$$″x-a″ \mid f = ″b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0″$$
$$\underline{\text{ssi}}$$
$$f = ″x-a″ \cdot ″b_n x^{n-1} + * \, x^{n-2} + \cdots + * \, x + *″ \qquad (1)$$

$* \Rightarrow$

$$″x-a″ \mid f$$
$$\Downarrow$$
$$f = ″x-a″ \cdot q \quad \wedge \quad q \in [\mathbb{R}]$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = (x-a)\cdot q(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) = (a-a)\cdot q(a)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) = 0$$

■

(1) : les signes $*$ désignent des réels, distincts ou non.

Remplacer partout " " par ⌈ ⌋

$* \Leftarrow$

Voici la fonction polynome

$$f = "b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0"$$

telle que $\quad f(a) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(x)}_{} - \underbrace{f(a)}_{} \\ &= (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) - (b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0) \\ &= b_n (x^n - a^n) + b_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + b_2 (x^2 - a^2) + b_1 (x-a) \\ &= b_n (x-a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1}) + \\ &\quad b_{n-1} (x-a)(x^{n-2} + a x^{n-3} + \cdots + a^{n-4} x^2 + a^{n-3} x + a^{n-2}) + \\ &\quad b_{n-2} (x-a)(x^{n-3} + \cdots + a^{n-5} x^2 + a^{n-4} x + a^{n-3}) + \\ &\quad \cdots \\ &\quad b_3 (x-a)(x^2 + a x + a^2) + \\ &\quad b_2 (x-a)(x + a) + \\ &\quad b_1 (x-a) \end{aligned}$$

Donc $\quad f = "x - a" \cdot "b_n x^{n-1} + * x^{n-2} + \cdots + * x + *"$ ∎

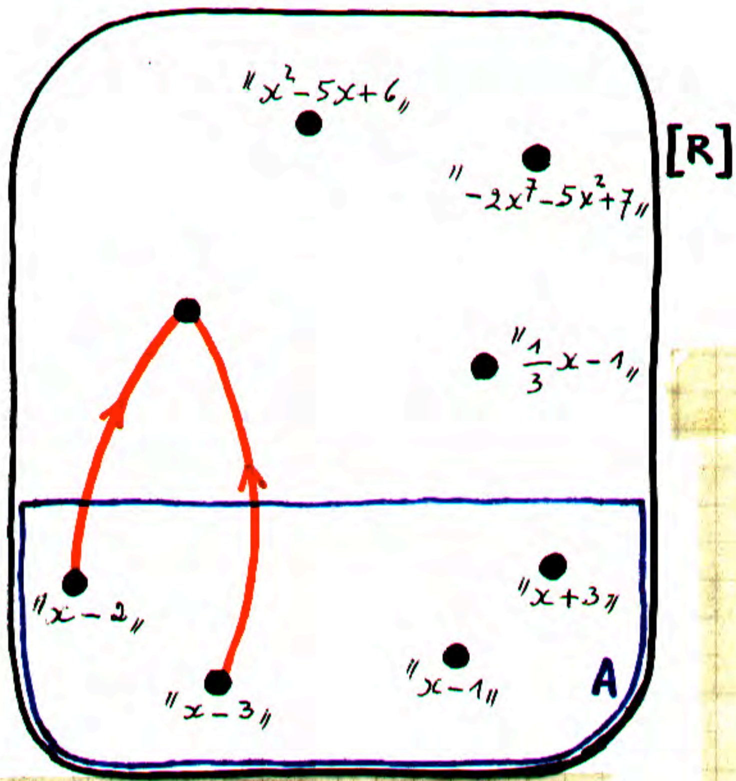
Exercices

1.

en $[\mathbb{R}]$	"$x-1$"	"$x+1$"	"$x+2$"	"$x-\frac{1}{2}$"
"$2x^2+x-3$"				
"$2x^2-x+3$"				
"$2x^3+7x^2-x-6$"				
"$-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-1$"			•	
"$4,5x^9+0,5x^5-5$"				

Complète ce tableau. (Le point signifie : "$x+2$" $\mid$ "$-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-1$")

2.



Dessine les flèches manquantes et marque une fonction polynome compatible avec ce graphe.

Remplacer partout " " par [ ]

3. Ecris le quotient de la division de

$$f = "b_n x^n + \dots + b_0" \qquad \text{par} \qquad "x - a"$$

(réfère-toi à la démonstration du théorème 2)

← Posant $\qquad q = "b_n x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0"$

vérifie

$$c_{n-2} = a\,b_n + b_{n-1}$$
$$c_{n-3} = a\,c_{n-2} + b_{n-2}$$
$$\dots$$
$$c_2 = a\,c_3 + b_3$$
$$c_1 = a\,c_2 + b_2$$
$$c_0 = a\,c_1 + b_1$$

Le tableau ~~suivant~~ te propose un procédé pour calculer aisément les coefficients de q

coefficients de f	b_n	b_{n-1} $a\,b_n$	b_{n-2} $a\,c_{n-2}$		b_3 ac_3	b_2 ac_2	b_1 ac_1
coefficients de q	$a\cdot$	$ab_n + b_{n-1}$	$ac_{n-2} + b_{n-2}$	...	$ac_3 + b_3$	$ac_2 + b_2$	$ac_1 + b_1$
coefficients de q	b_n	c_{n-2}	c_{n-3}	...	c_2	c_1	c_0

4. $"x - 3" \,\big|\, "2x^3 - 4x^2 - 18"$ (Vérifie!)

coeff. de f	2	-4	0	-18
	$3\cdot$	6	6	
coeff. de q	2	2	6	

$$q = "2x^2 + 2x + 6"$$

5. Calcule le quotient (exact) des divisions proposées à l'ex. 1

Remplacer partout

5. <u>Si</u> $"x - a" \mid f = "b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0" \in [\mathbb{R}]$

$a, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{Z}$

<u>Alors</u> $a \mid b_0$

* $"x - a" \mid f \Rightarrow f(a) = 0$

$\Rightarrow b_n a^n + \cdots + b_1 a + b_0 = 0$

$\Rightarrow b_0 = a \cdot (-b_n a^{n-1} - \cdots - b_1)$

$\Rightarrow a \mid b_0$ ∎

6. ——— en $[\mathbb{R}]$ ——— $a, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{Z}$ ———

$$\boxed{\begin{array}{ccc} "x-a" \mid f = "b_n x^n + \cdots + b_0" & \Leftrightarrow & f(a) = 0 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & a \mid b_0 & \end{array}}$$

7. <u>Si</u> $f = "b_n x^n + \cdots + b_0" \in [\mathbb{R}]$

$b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{Z}$

<u>Alors</u> dans la recherche des diviseurs $"x - a"$ $(a \in \mathbb{Z})$ de f il suffit de considérer les $"x - a"$ tels que $a \mid b_0$

8. Diviseurs $"x - a"$ de

$"x^2 + x + 2"$ $\quad$ $"x^2 + x + 1"$ $\quad$ $"x^2 + 4x - 45"$

$"x^2 + x - 2"$ $\quad$ $"x^2 - x - 6"$ $\quad$ $"x^3 - 12x^2 - 12x - 13"$?