

9

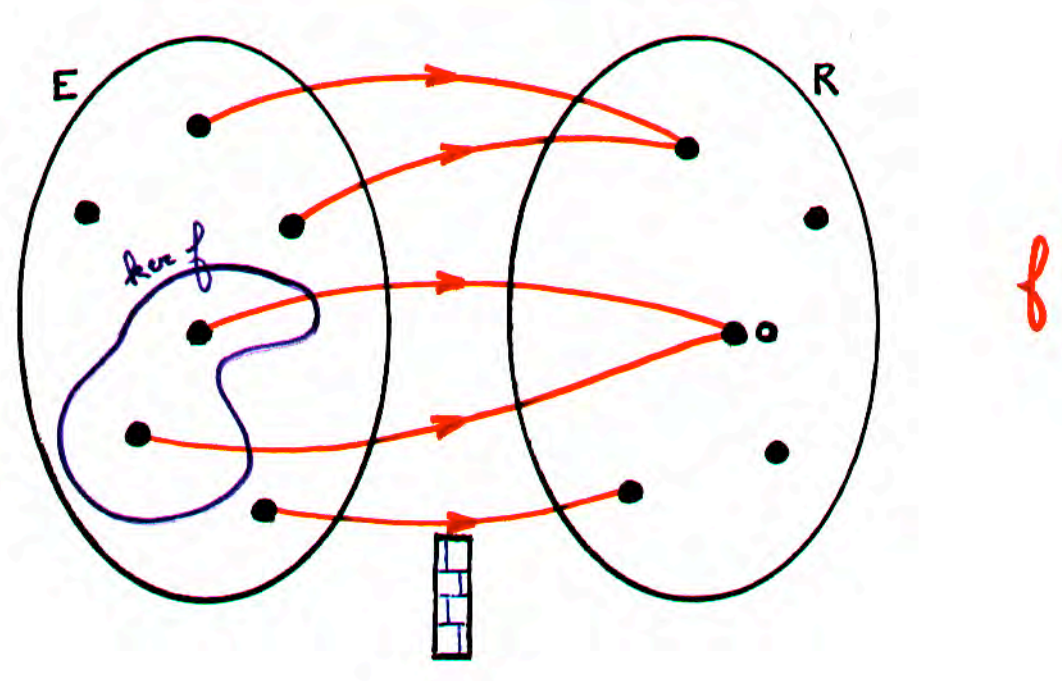
Fonctions rationnelles

1 Zéros d'une fonction de E vers R

fonction f de E vers \mathbb{R} ; $z \in E$

z est zéro de f ssi $f(z) = 0$

L'ensemble des zéros de la fonction f est appelé le noyau de f et noté $\ker f$. (*)



Exercices

1. $\ker [x^2 - 5x + 6] =$
 $\ker [(3x+7)(3x^2+7)] =$

$\ker [27x^3 - 54x^2 + 36x - 8] =$
 $\ker [x(x+1)(4x^2-5)] =$

(*) : noyau = kernel (angl.)

2. Calcul de noyaux:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto [x]$$

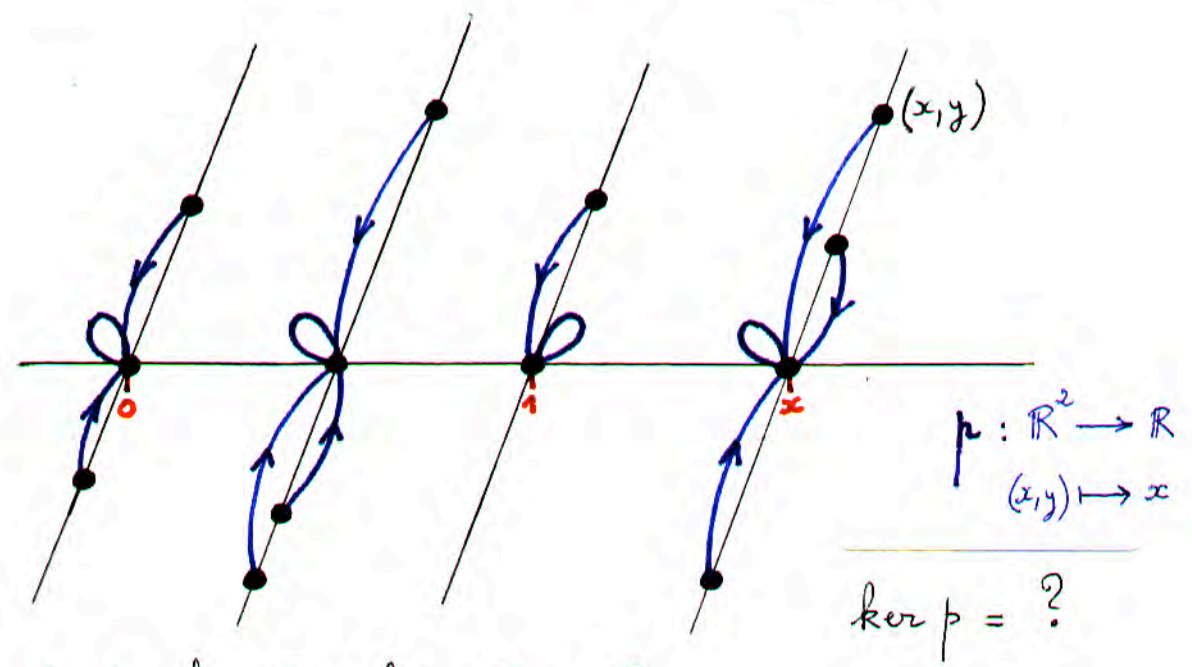
$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto a$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto 2^z$$

3.

rouge = noie



4. Pour toute fonction f de E vers \mathbb{R}

$$\ker f = f^{-1}\{0\}$$

5. Noyau de $\lceil \mathbb{R} \rceil \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(3) \quad ?$

6. Noyau de $\lfloor \mathbb{R} \rfloor \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(3) \quad ?$

Présente des éléments de ce noyau.

7. Noyau de la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

2 Calcul des fonctions de E vers R

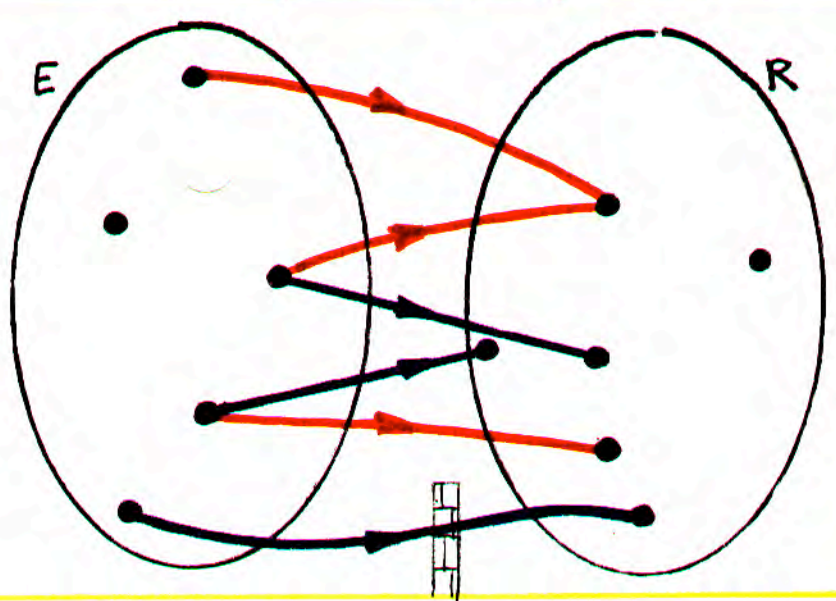
On comprend aisément ce qu'il convient d'entendre par

somme	différence	produit	quotient
$f+g$	$f-g$	$f \cdot g$	f/g

des fonctions f et g de E vers R

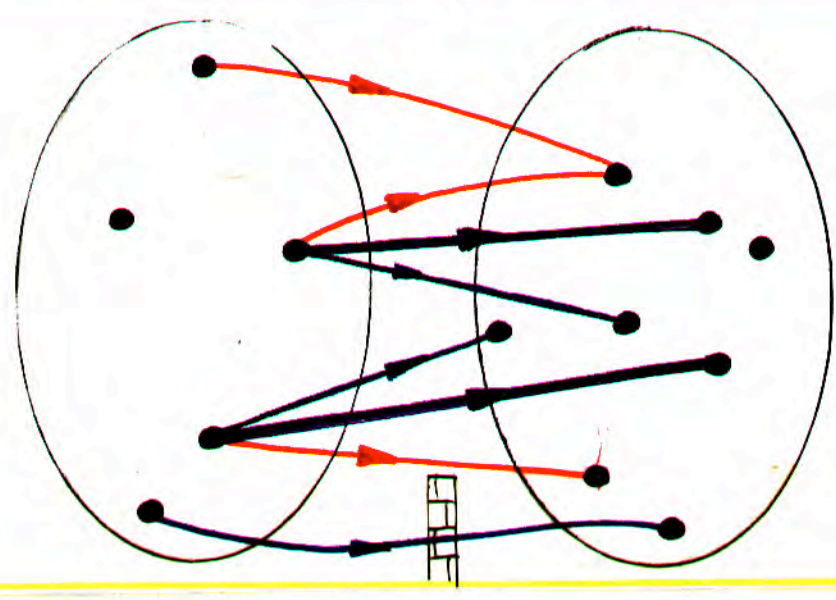
Si

$$f, g$$



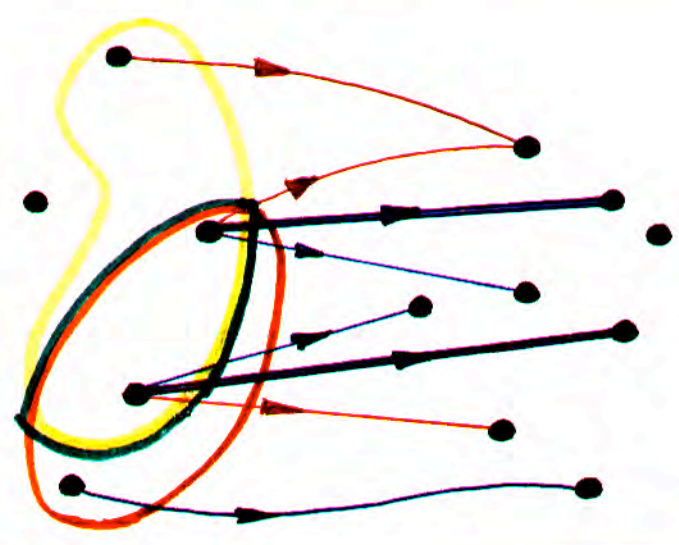
Alors

$$f+g$$



et

$$\text{dom}(f+g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g$$



De même

$$\text{dom}(f-g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g = \text{dom}(f \cdot g)$$

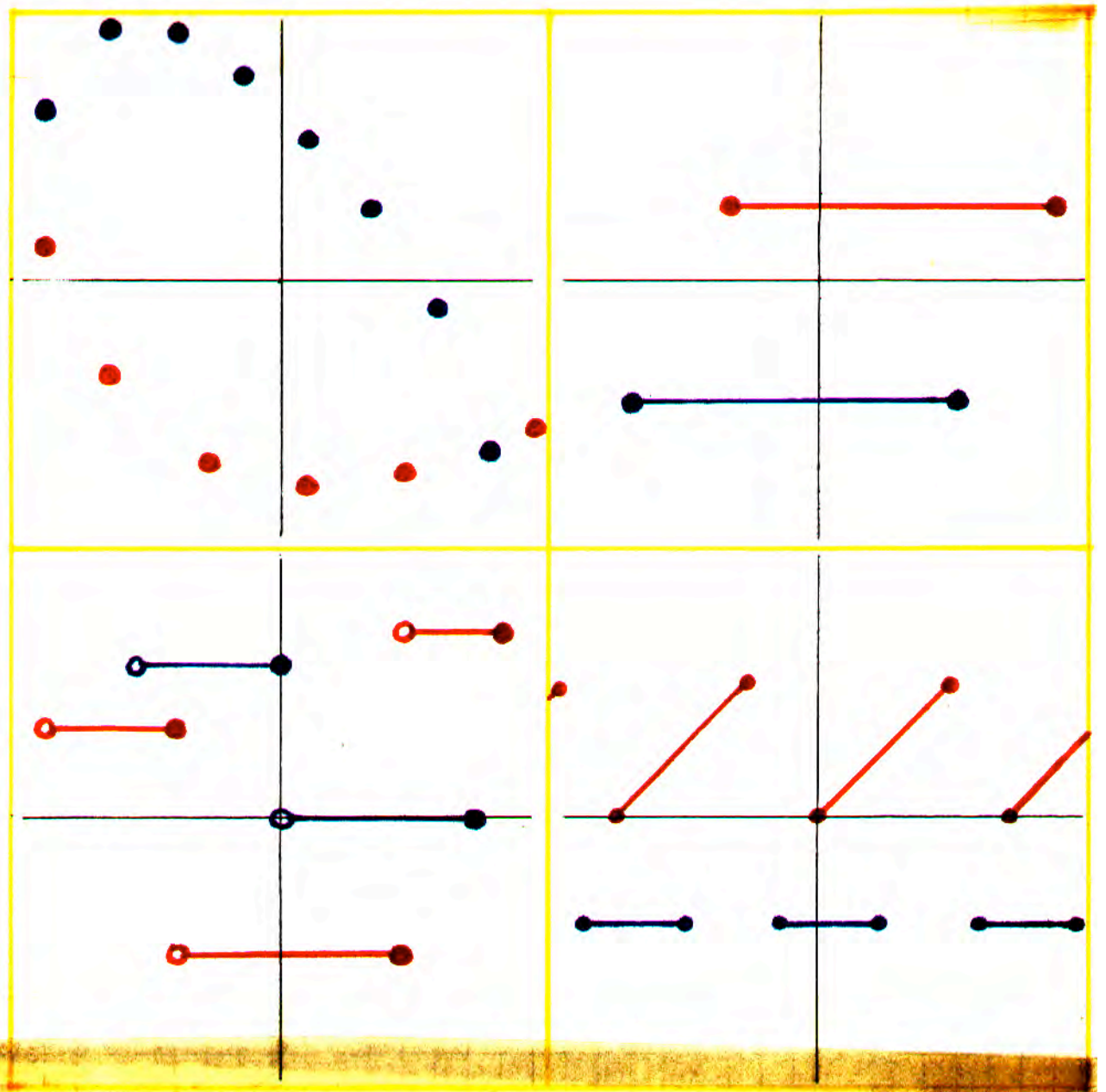
et aussi

$$\text{dom}(f/g) = (\text{dom } f \cap \text{dom } g) \setminus \text{ker } g$$

2 Pour toutes fonctions f, g de E vers \mathbb{R}

$f+g : \text{dom } f \cap \text{dom } g \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)+g(x)$
 $f-g : \text{dom } f \cap \text{dom } g \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)-g(x)$
 $f \cdot g : \text{dom } f \cap \text{dom } g \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
 $f/g : (\text{dom } f \cap \text{dom } g) \setminus \text{ker } g \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)/g(x)$

EX



EX f, g sont des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Dessine $f+g$

a) $f(a) = 10^3$ $g(a) = 2^5$

b) $f(a) = -4$ $g(a) = 3,5$

c) $f(a) = 2,25$ $g(a) = \frac{5}{8}$

d) $f(a) = -\frac{27}{11}$ $g(a) = \frac{18}{121}$

Dans chaque cas,
calcule $(f/g)(a)$

EX Calcule $\text{dom}(f+g)$ et $\text{dom}(f/g)$, f et g étant les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par

	$f(x)$	$g(x)$
1	$2x+7$	$x-1$
2	$x-1$	$2x+7$
3	$x^5 - 2x^3 + 2$	$3x^2 - 4x - 4$
4	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{2x-7}$
5	$\frac{x^4 - 5x^2}{x-5}$	$\frac{x-5}{x^4 - 5x^2}$

	$f(x)$	$g(x)$
6	x	$ x $
7	x	$[x]$
8	\sqrt{x}	x^2
9	x	$\sqrt{x^2}$
10	x^{-2}	x^{-5}

Calcule $f+g$, $f-g$, f/g , $f \cdot g$

3 Fonctions rationnelles

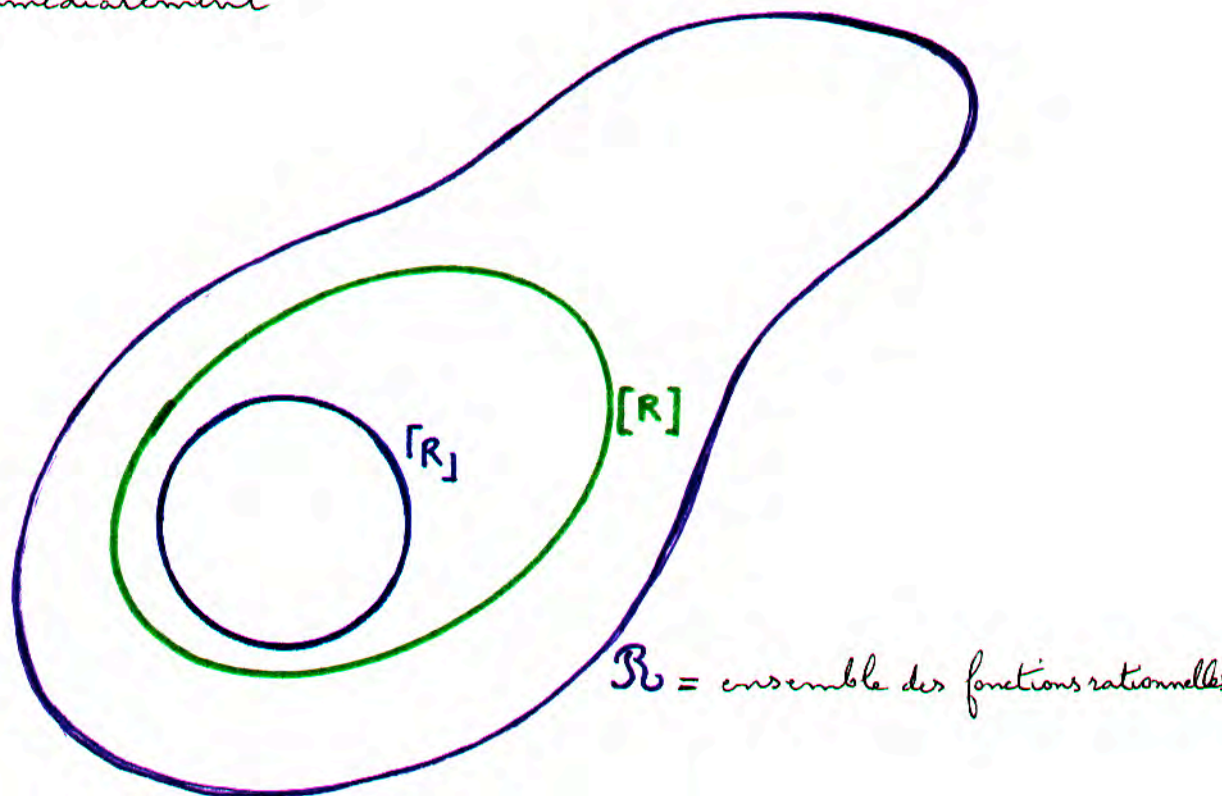
3 fonction rationnelle = quotient de fonctions polynomes

Toute fonction rationnelle s'écrit

$$\frac{\{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0\}}{\{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0\}}$$

avec $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0 \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N}$

Immédiatement



Exercices

1. Calcule le domaine de

$$\frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil 3x+2 \rceil}, \quad \frac{\lceil x^2-4 \rceil}{\lceil x^2+4x-12 \rceil}, \quad \frac{\lceil x^2+4x-12 \rceil}{\lceil x^2-4 \rceil}$$

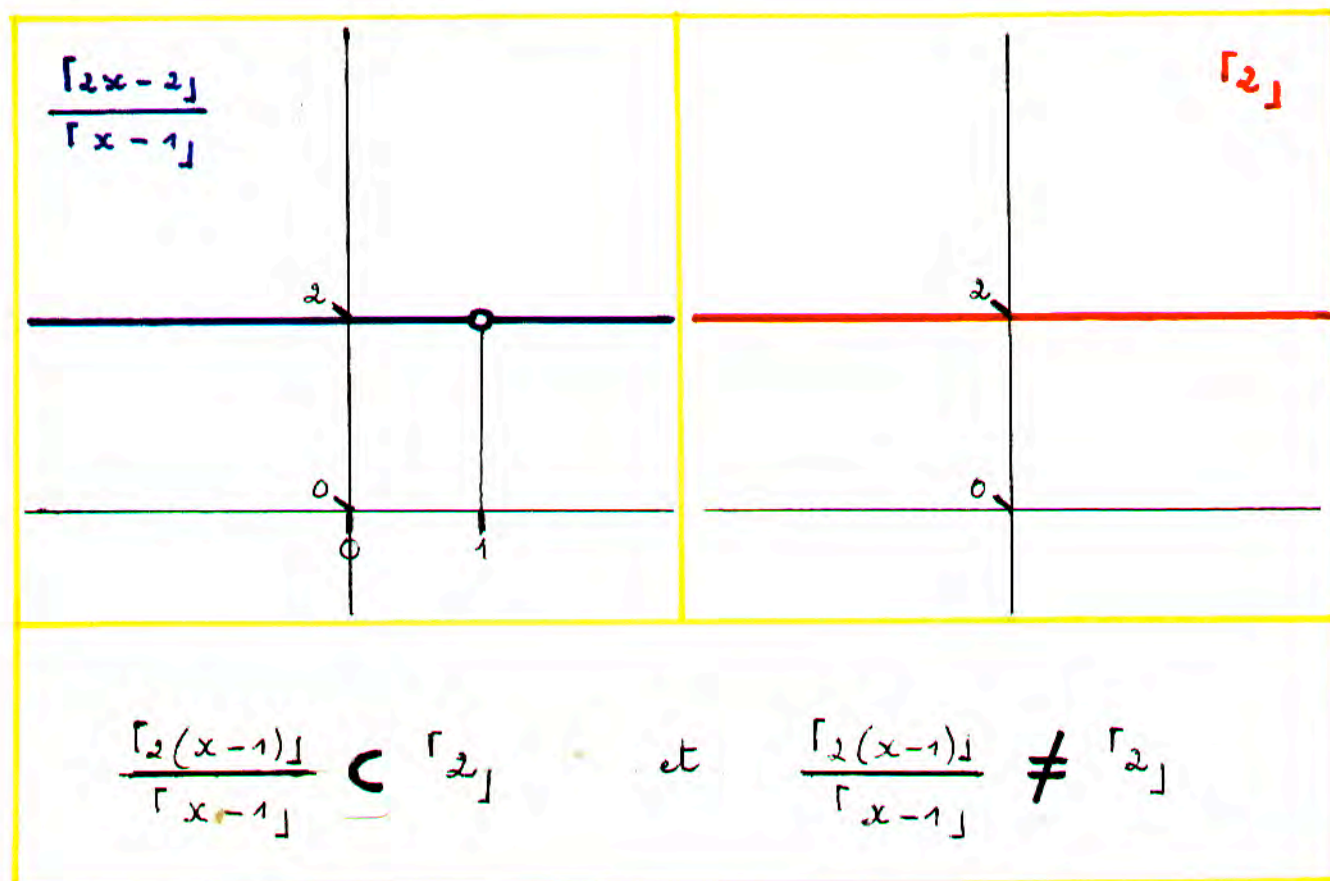
$$\frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil x^2+1 \rceil}, \quad \frac{\lceil (x-1)^2 \rceil}{\lceil x^2-2x+1 \rceil}, \quad \frac{\lceil (x^2+1)^2 \rceil}{\lceil x^4+2x^2+1 \rceil}$$

$$\frac{\lceil 2x^4+x^3-29x^2-32x+24 \rceil}{\lceil 4 \rceil}, \quad \frac{\lceil 4 \rceil}{\lceil 2x^4+x^3-29x^2-32x+24 \rceil}$$

2. Représente chacune de ces fonctions [ex 1] par un point sur le diagramme ci-dessus.
3. Présente une fonction rationnelle de domaine $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$
4. Sur le diagramme ci-dessus ajoute la corde de
 - l'ensemble des fonctions rationnelles de domaine \mathbb{R}
 - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$

Présente des éléments de chacune des flages non vides de ce diagramme.

4. Gare aux simplifications illicites!



En simplifiant la fonction rationnelle par $\llbracket x-1 \rrbracket$ on agrandit son domaine!

Calculons la somme de

$$f = \frac{\llbracket (x-1)(x+1) \rrbracket}{\llbracket (x-1)(x-3) \rrbracket} \quad \text{et} \quad g = \frac{\llbracket 1 \rrbracket}{\llbracket x-3 \rrbracket}$$

$$\forall x \in \text{dom}(f+g) : (f+g)(x) = \frac{\llbracket (x-1)(x+1) \rrbracket}{\llbracket (x-1)(x-3) \rrbracket} + \frac{1}{x-3}$$

$$= \frac{\llbracket (x-1)(x+1) + x-1 \rrbracket}{\llbracket (x-1)(x-3) \rrbracket}$$

$$= \frac{\llbracket (x-1)(x+2) \rrbracket}{\llbracket (x-1)(x-3) \rrbracket}$$

$$f+g = \frac{\llbracket (x-1)(x+2) \rrbracket}{\llbracket (x-1)(x-3) \rrbracket}$$

Exercices

1. Calcule la somme et le produit de

$$a) \frac{\lceil 2x+1 \rceil}{\lceil x+2 \rceil} \quad \text{et} \quad \frac{\lceil x+2 \rceil}{\lceil 2x+1 \rceil}$$

$$b) \frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil x^2-9 \rceil} \quad \text{et} \quad \frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil x-3 \rceil}$$

$$c) \frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil x^2-8x-33 \rceil} \quad \text{et} \quad \frac{\lceil 1 \rceil}{\lceil x^2+3x-28 \rceil}$$

$$d) \frac{\lceil (x+1)^3 \rceil}{\lceil (x^2-1)^2 \rceil} \quad \text{et} \quad \frac{\lceil x^3+1 \rceil}{\lceil x-1 \rceil}$$

$$e) \lceil 5x^2-2 \rceil \quad \text{et} \quad \frac{\lceil 2x-3 \rceil}{\lceil 4-7x \rceil}$$

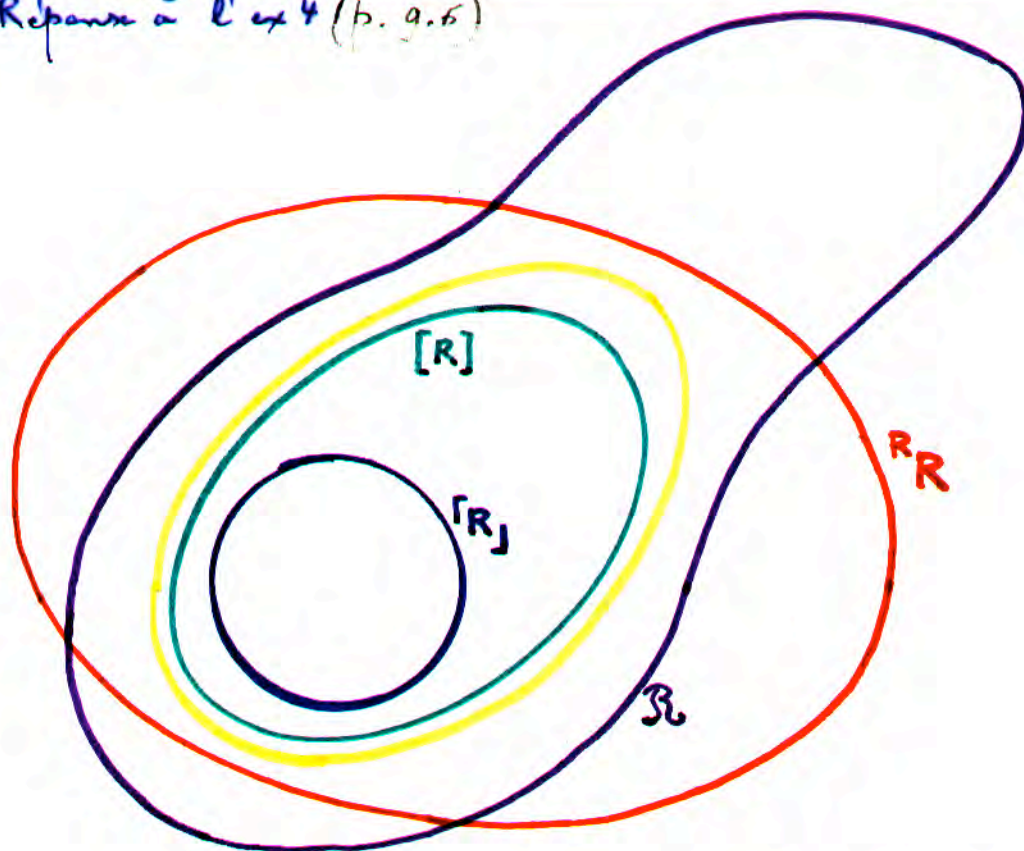
$$f) \frac{\lceil 3x+7 \rceil}{\lceil x^2-0,01 \rceil} \quad \text{et} \quad \frac{\lceil x+0,1 \rceil}{\lceil x^2+0,01 \rceil}$$

2. Calcule la différence et le quotient de ces couples de fonctions.

3. Somme, différence, produit, quotient des fonctions rationnelles sont-ils des fonctions rationnelles ?

$$4. \frac{\lceil (x-1)(x+2) \rceil}{\lceil (x-1)(x-3) \rceil} = \frac{\lceil x+2 \rceil}{\lceil x-3 \rceil} \setminus \left\{ \left(1, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

5. Répondre à l'ex 4 (p. 9.6)



Tracez la plage vide (ou les plages vides).

6. Présente un diagramme sans plages vides de cette situation.