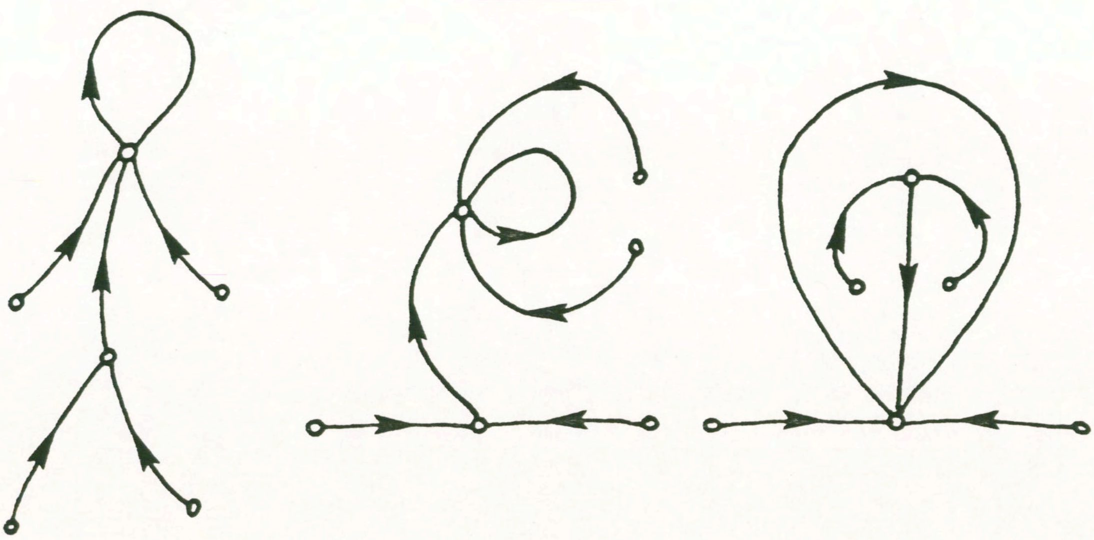
Chapitre 2

L'ORDINATEUR JOUE AUX GRAPHES

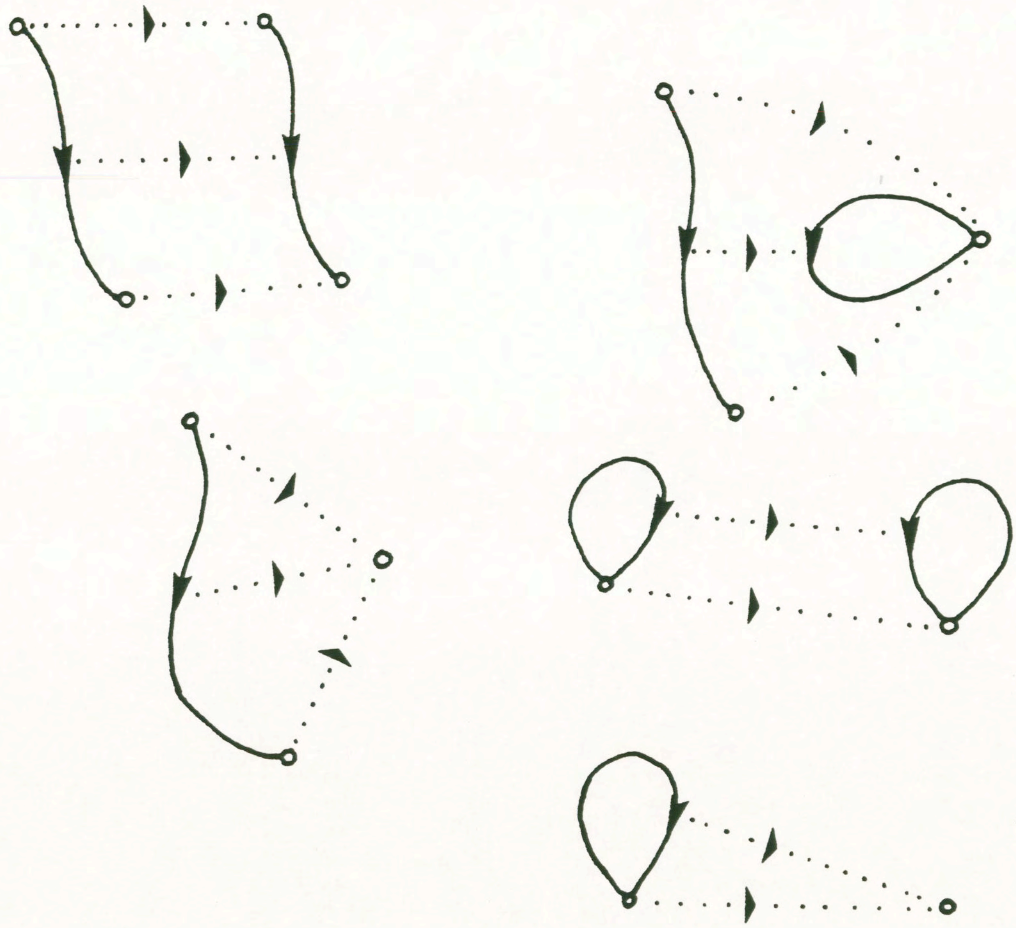
Deux graphes sont dits isomorphes lorsque chacun d'eux est modèle parfait de l'autre par des traductions fidèles inverses mutuelles nommées isomorphismes.

Voici une danseuse sagittale en gracieux et ensorcelants isomorphismes.

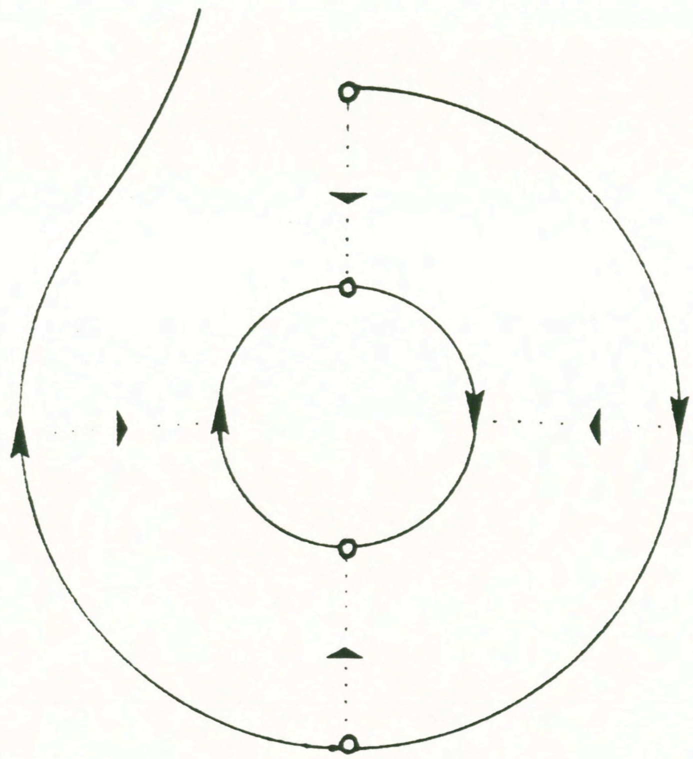


Un ordinateur pourra toujours être conçu comme un graphe éventuellement vu à isomorphisme près. Mais on peut aller plus loin et nous regarderons souvent l'ordinateur comme graphe à certains morphismes près, ceux-ci étant les fonctions de graphe dans graphe qui respectent origine et extrémité.

De manière plus précise et redondante, morphisme de graphes signifie fonction de graphe dans graphe qui applique sommet sur sommet, et flèche sur flèche (ou pétale ou sommet) en respectant origine et extrémité: l'image de l'origine de toute flèche du domaine est l'origine de l'image de cette flèche et l'image de l'extrémité est l'extrémité de l'image.



Ce <u>morphisme</u> <u>bijectif</u> <u>de</u> <u>connexion</u>,



qui traduit mathématiquement la démarche physique concrète de connexion, n'est pas un isomorphisme.
Les déconnexions vont à contre-morphisme.

En vue de préciser à quels morphismes près l'ordinateur se voit graphe, s'introduit l'évident concept de <u>sous-graphe</u>: partie de graphe qui comprend les sommets de ses flèches dans le graphe ambiant.

*

* *

Tout ensemble de flèches et de sommets d'un graphe <u>engendre son sous-graphe</u> en s'adjoignant les sommets de ses flèches dans le graphe ambiant.

Tout ensemble de sommets d'un graphe en est un sous-graphe.

Tout graphe contient le sous-graphe vide.

Tout graphe est son propre sous-graphe aussitôt dit <u>impropre</u>.

Le sous-graphe vide et le sous-graphe impropre d'un graphe sont ses sous-graphes <u>triviaux</u>.

Toute intersection et toute réunion de sous-graphes d'un graphe en sont des sous-graphes.

L'ensemble des flèches internes d'un graphe (pétales et sommets compris) est son (<u>sous</u>-)<u>graphe interne</u>.

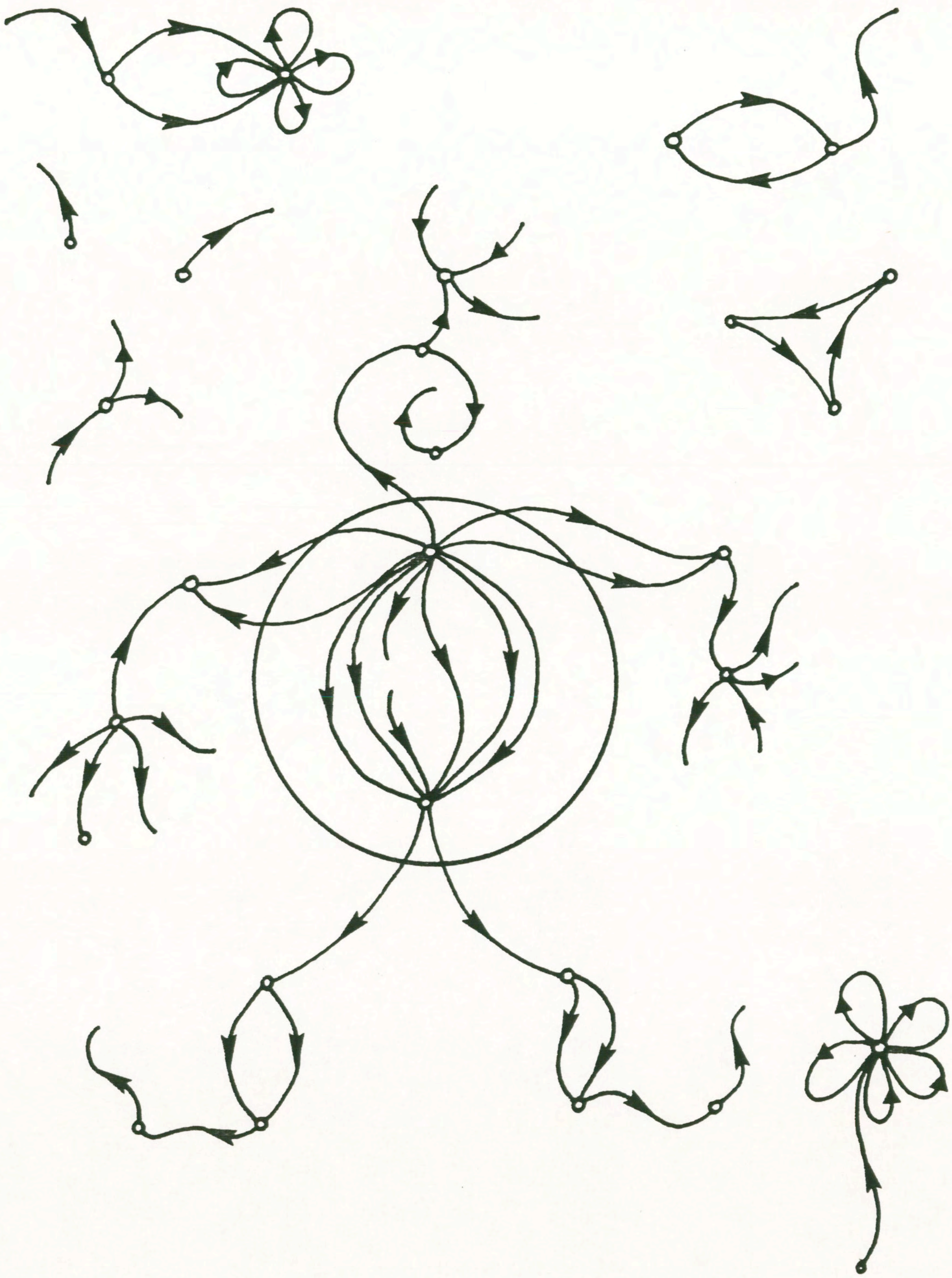
Tout sous-graphe non vide comprend au moins un sommet.

Deux sous-graphes non disjoints ont toujours au moins un sommet commun.

*

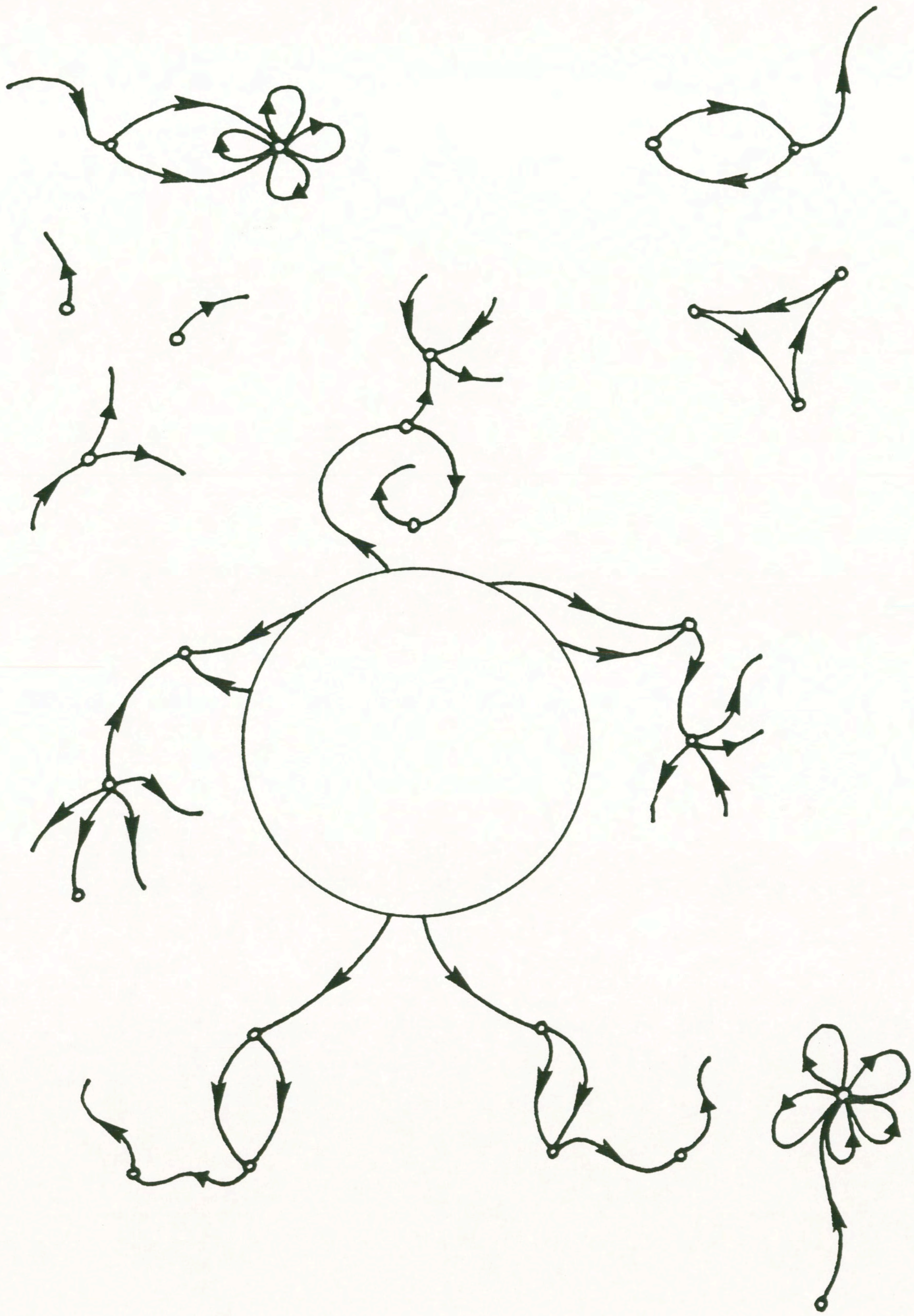
* *

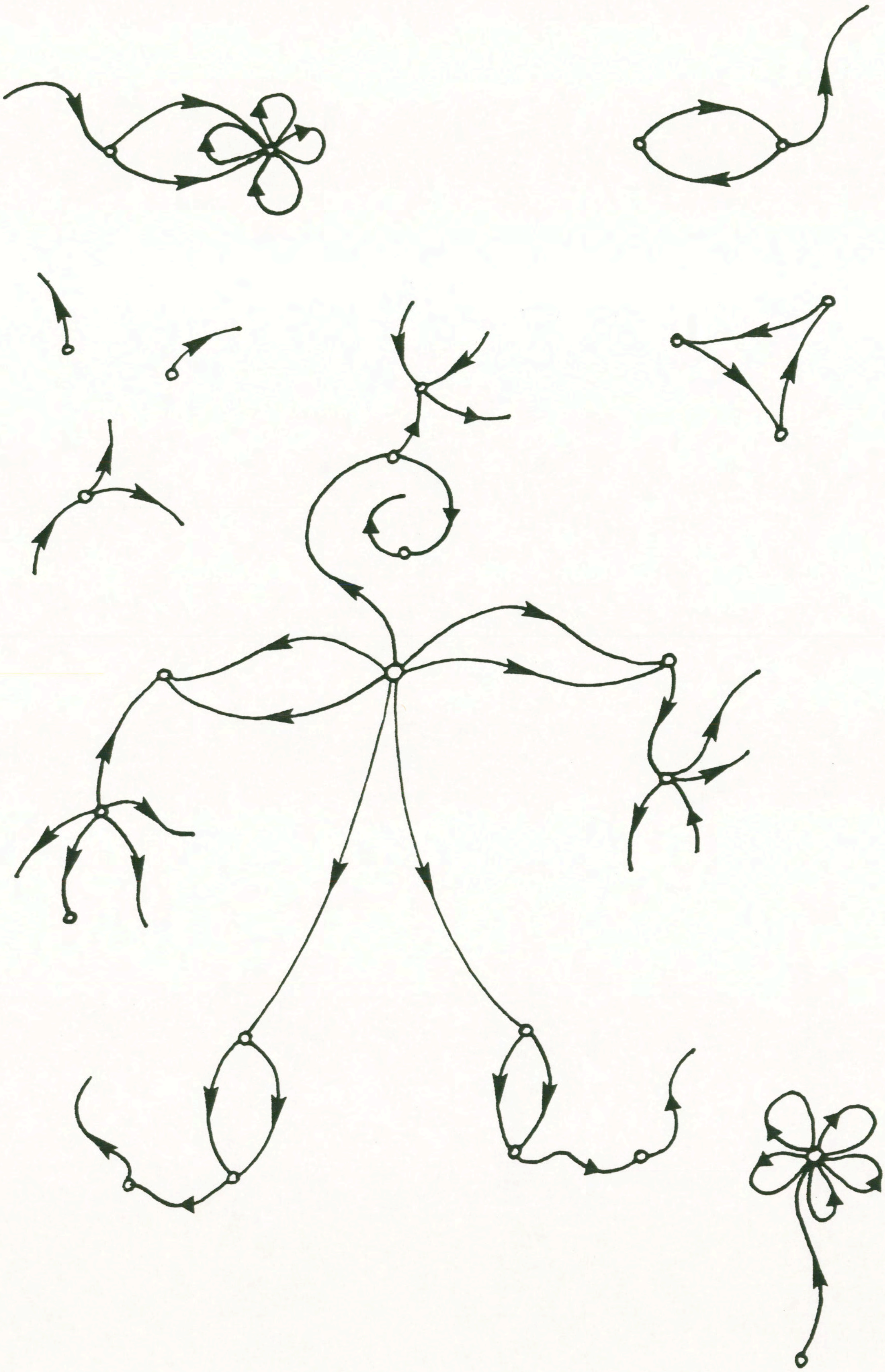
Dans les dessins suivants, des contours mettent en évidence deux sous-graphes non vides du graphe de bienvenue.

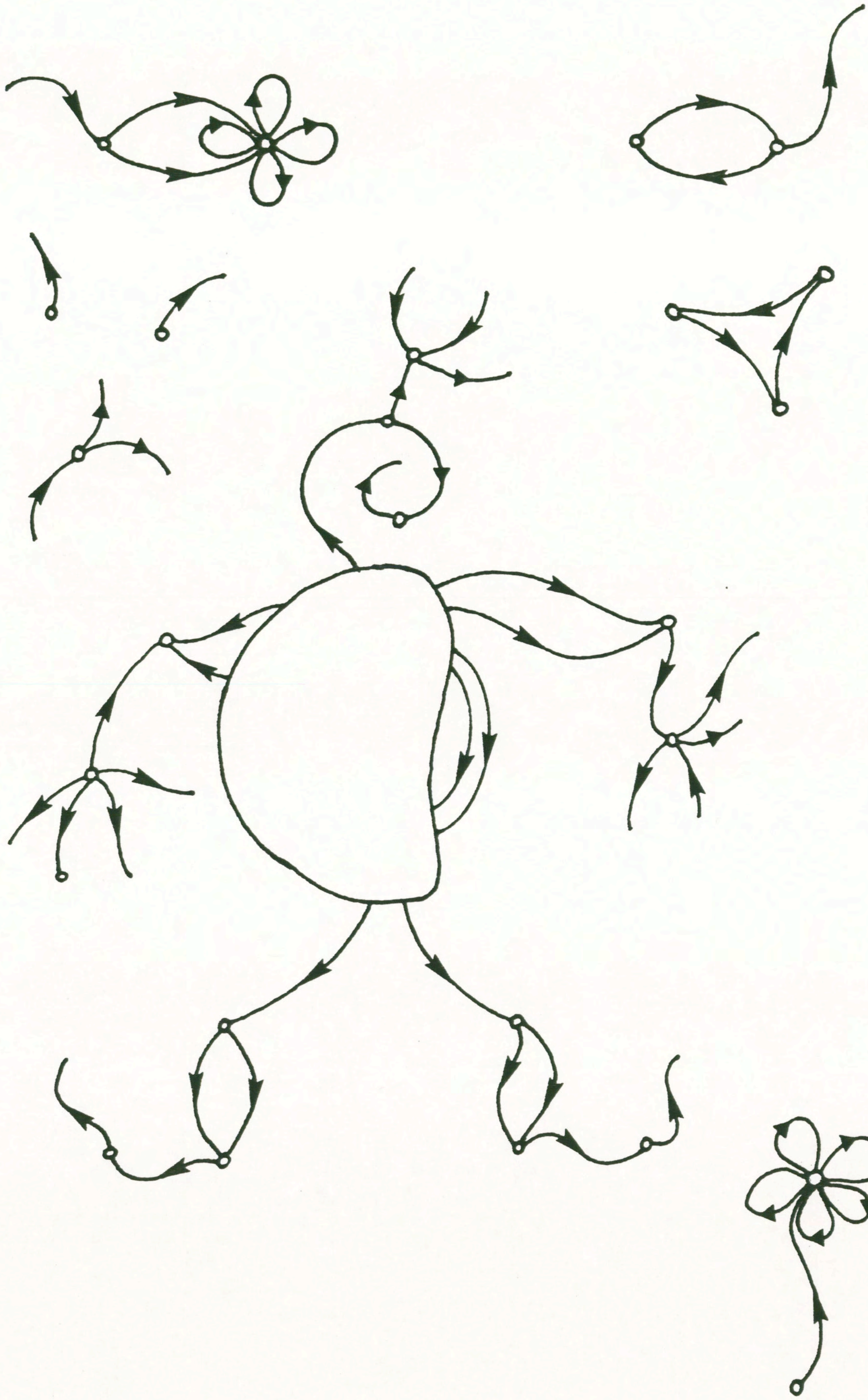


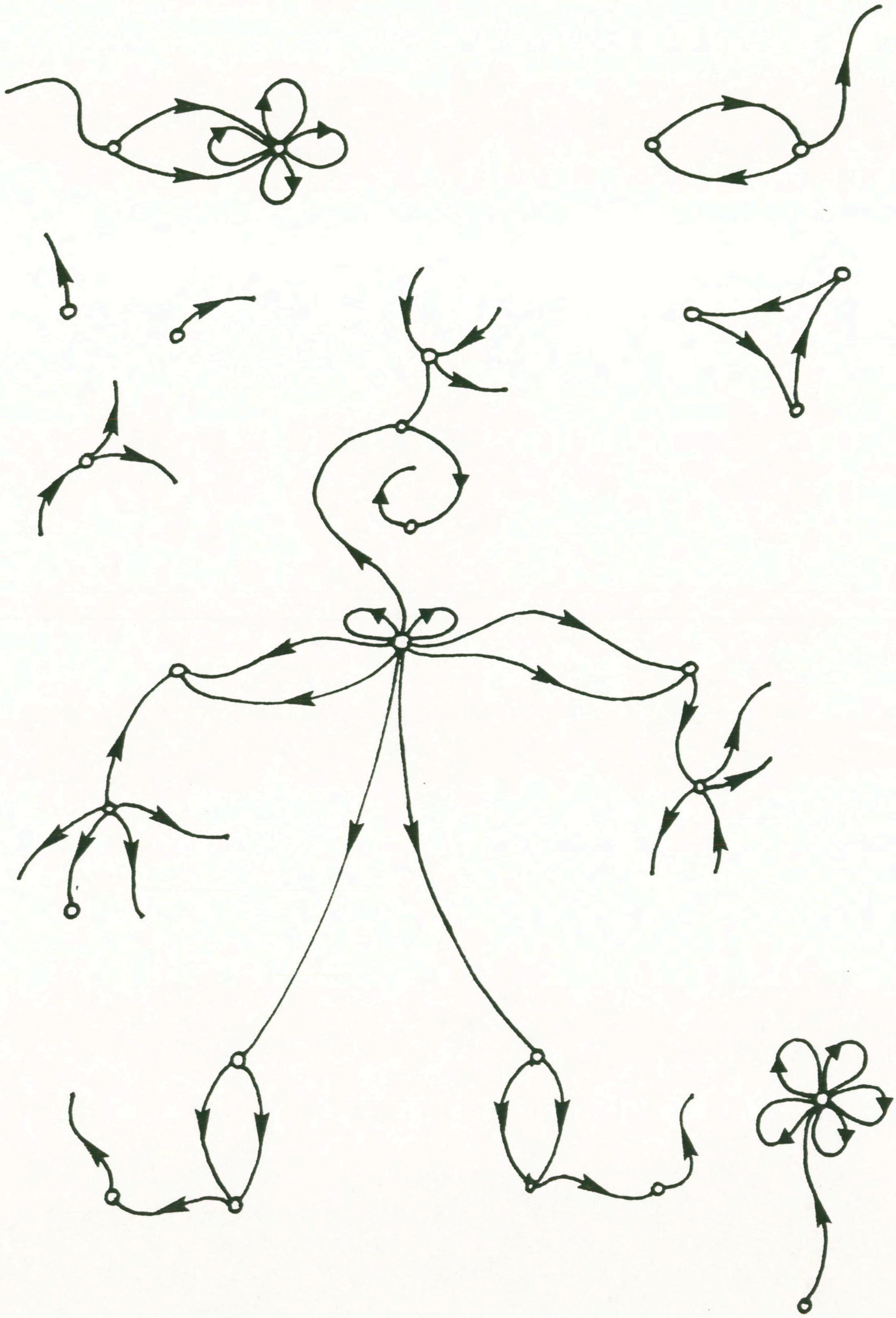
Par <u>oubli</u>, tout sous-graphe non vide se contracte en l'un de ses sommets. Le graphe ainsi obtenu <u>à isomorphisme près</u> est le <u>quotient du graphe par ce sous-graphe</u>.

Voici deux dessins successifs des quotients du graphe de bienvenue par chacun des sous-graphes présentés ci-dessus.









Passer au quotient d'un graphe par un de ses sous-graphes non vides, c'est regarder le graphe de départ d'un nouvel oeil, en faisant du sous-graphe une sorte de boîte noire, en forme de sommet du graphe-quotient. Le quotient d'un graphe par un sous-graphe non vide atomise ce sous-graphe en sommet du graphe-quotient.

*

*   *

Tout graphe égale son quotient par le sous-graphe vide. Le quotient d'un graphe non vide par son sous-graphe impropre, (en s'oubliant lui-même) est un graphe singleton: sa seule flèche est aussitôt sommet (ruinant l'axiome de commodité!)

Le quotient d'un graphe par son sous-graphe interne est un graphe à un seul sommet dont les entrées sont les flèches sensorielles et les sorties les commandes du graphe de départ.

Chaque fois qu'un graphe sera regardé comme un graphe à un seul sommet, on supposera avoir implicitement procédé par oubli du sous-graphe interne.

Chaque fois que l'on parlera des entrées ou des sorties d'un graphe (ou d'un sous-graphe), on le supposera regardé comme graphe à sommet unique par oubli de son sous-graphe interne.

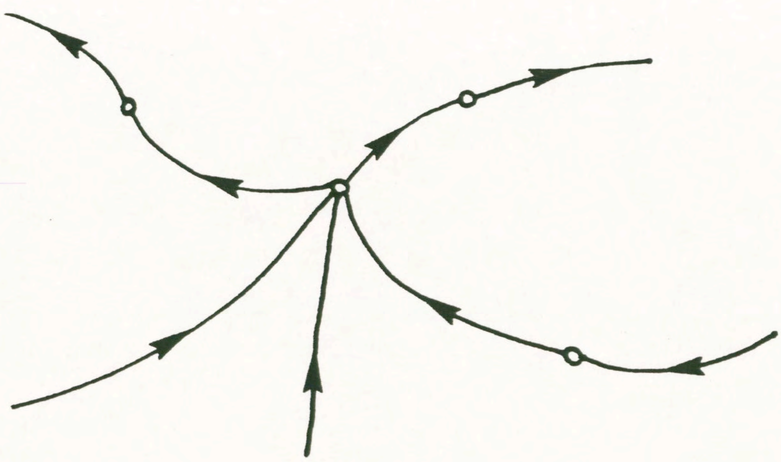
Disant qu'une fonction f *fixe* un élément e si et seulement si elle l'applique sur lui-même $f(e) = e$:

Tout quotient G/S d'un graphe G par un sous-graphe non vide S définit son *morphisme d'oubli* $G \longrightarrow G/S$, qui applique tout élément de S sur le sommet de S en lequel S se contracte et *fixe* tout autre élément de G .

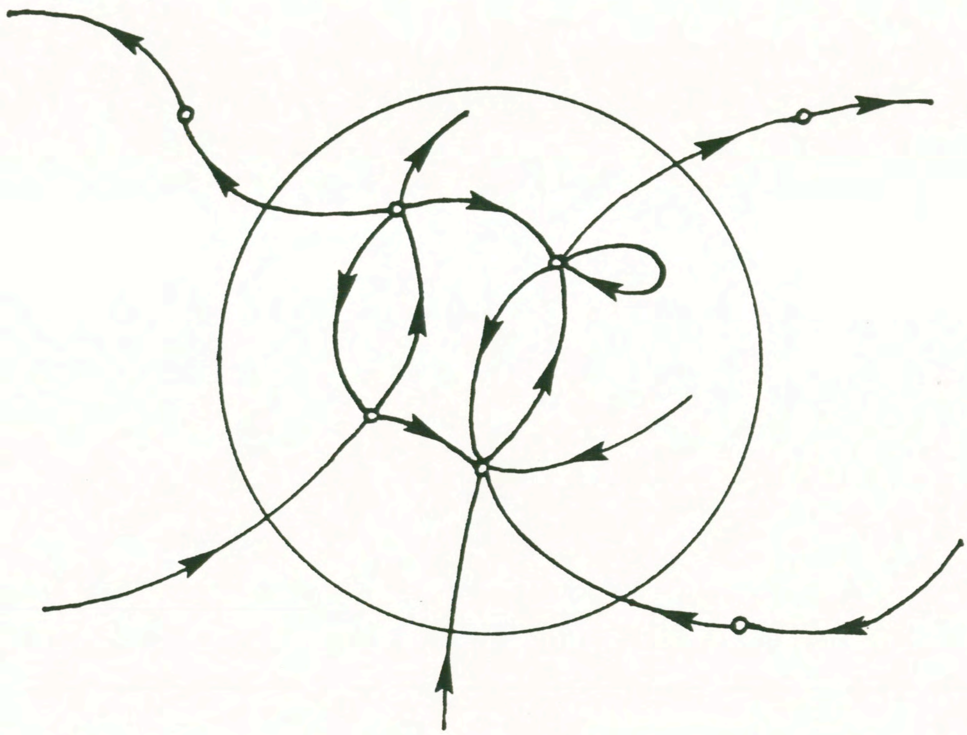
Les dessins des pages 2.5 et 2.6 offrent chacun simultanément deux manières de voir un même graphe à certains *morphismes d'oubli* près.

On passe du graphe G à son quotient G/S par un morphisme d'oubli du sous-graphe S , qui contracte ce sous-graphe en un sommet. Un passage inverse de G/S à G s'effectue par un *montage* qui remplace un sommet de G/S par le graphe S .

Ce montage remplace un sommet à m entrées et n sorties



par un graphe à m flèches sensorielles et n commandes.



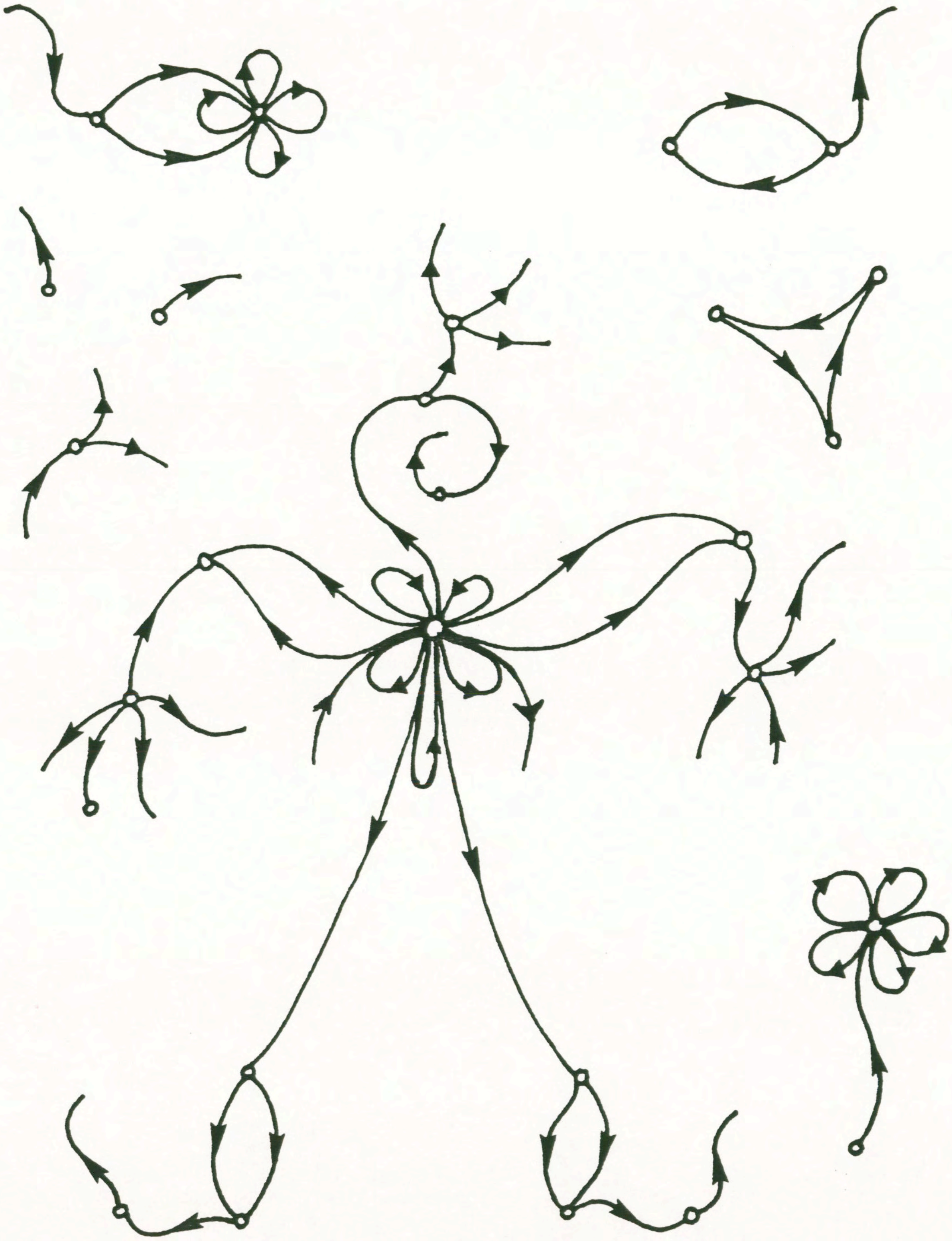
Le quotient par un sous-graphe formé de sommets <u>soude</u> ces sommets en un seul sommet.

Le quotient par le sous-graphe formé par une flèche à un seul sommet et ce sommet opère l'<u>ablation</u> de cette flèche.

Le passage d'un graphe G à son quotient G/S par un sous-graphe S peut toujours se décomposer comme suit

1. soudure des sommets de S en un seul sommet
2. ablation des pétales nouveaux créés par cette soudure à partir des flèches de S à sommets distincts
3. ablation des flèches sensorielles, des commandes et des pétales de G qui appartiennent à S .

Les quotients du graphe de bienvenue présentés plus haut reviennent à la soudure de deux sommets cruciaux...



suivie de l'ablation d'une flèche sensorielle, d'une commande et de cinq pétales dans le premier exemple et de trois dans le second.

Par définition, le quotient d'un graphe par des sous-graphes deux à deux disjoints contracte chacun de ces sous-graphes en un de ses propres sommets.

<u>Théorème 1</u> Tout quotient de graphe par des sous-graphes deux à deux disjoints consiste en les soudures entre eux des sommets de chacun de ces sous-graphes, suivies de l'ablation des pétales créés par ces soudures et des flèches sensorielles, des commandes et des pétales de ces sous-graphes. ■

Les montages de certains sommets d'un graphe vont à contre-morphisme.

*

* *

EXERCICES

En ces exercices, les graphes ne se soucient pas d'obéir à l'axiome de commodité.

1. En langue légère, et à isomorphisme près :

Toute flèche à origine et extrémité distinctes admet trois quotients;

Tout aller-retour à sommets distincts admet quatre quotients;

Les tricycles (proprement dits) admettent exactement sept quotients.

2. Dessiner un quotient du graphe ci-dessous par les quatre sous-graphes indiqués par les pointillés: