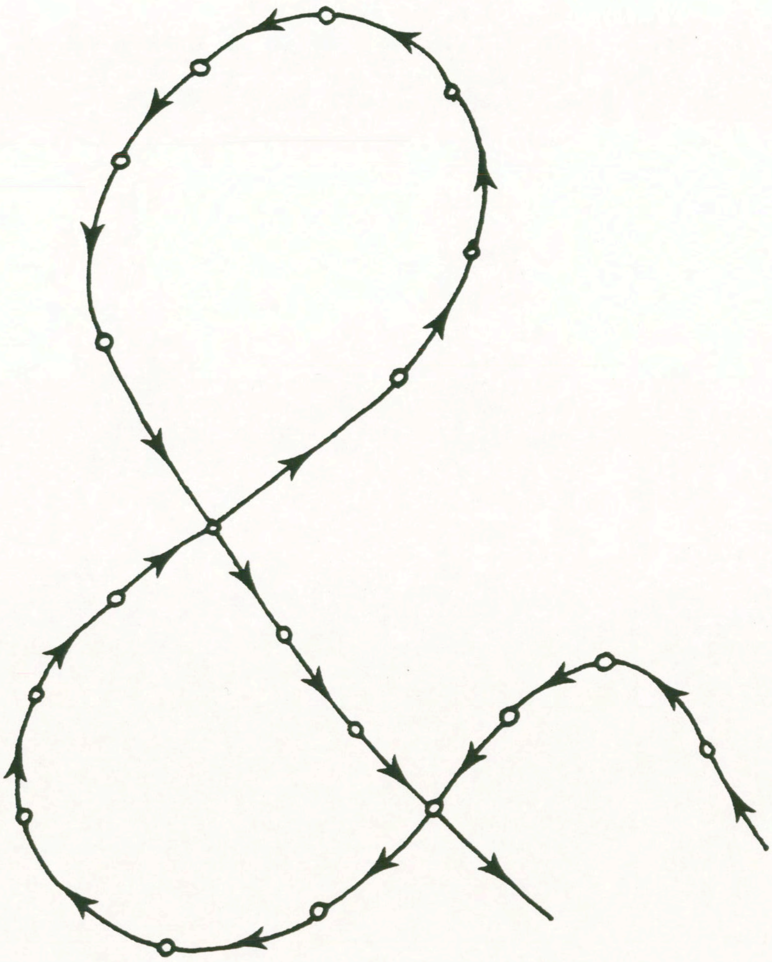
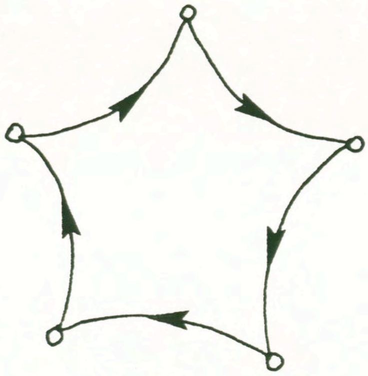
Chapitre 4

LE GRAPHE SE BALISE

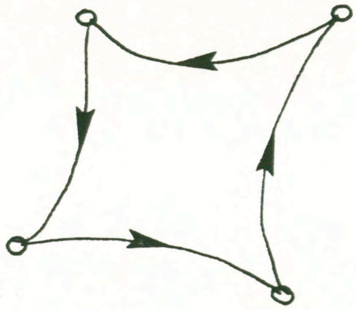
Les routes d'un graphe sont ses suites de flèches en queue leu leu.



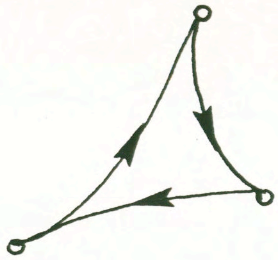
Les <u>cycles</u> sont les routes circulaires



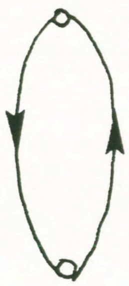
5-cycle



quadricycle



tricycle



bicycle

monocycle

le cycle nul
en le sommet s

Pour tout naturel non nul n

Tout 2n-cycle contient exactement deux noyaux.

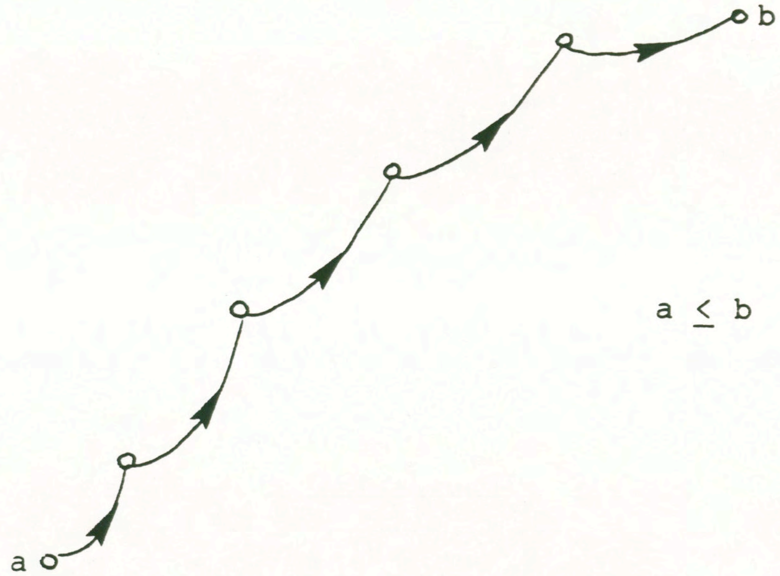
Aucun (2n+1)-cycle ne contient de noyau.

Pour tous sommets de graphe,

on dit que a <u>informe</u> b ce qui s'écrit $a \leq b$

si et seulement si

une route du graphe (au moins) conduit de a en b



$a \leq b$

Flèches et sommets ci-dessus dessinés distincts peuvent coïncider

L'information $\leq$

clairement transitive $\quad a \leq b \leq c \implies a \leq c$

est <u>réflexive</u> $\quad a \leq a$

par suite de l'existence d'un cycle nul en chaque sommet.

La relation stricte $\quad a \leq b \neq a$

écrite $\quad a < b$

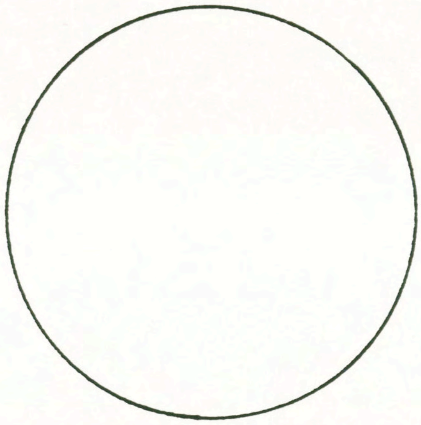
se lit $\quad$ a est un <u>informateur</u> de b

Le <u>poids</u> p(s) d'un sommet de graphe

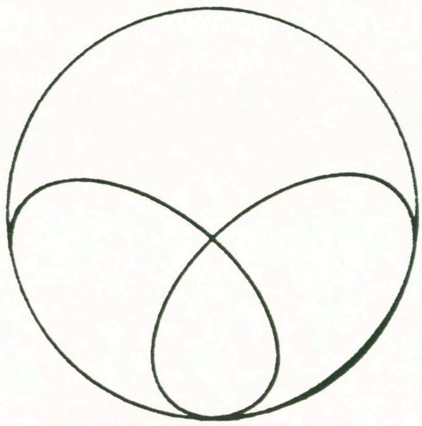
est le nombre de ses informateurs.

4.4

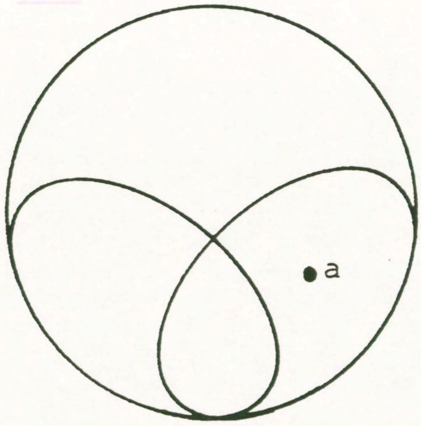
En graphe, voici des sommets a < b et l'ensemble des sommets du graphe:



Plaçons-y, à gauche, l'ensemble des informateurs de a et à droite, l'ensemble des informateurs de b



... et le sommet a

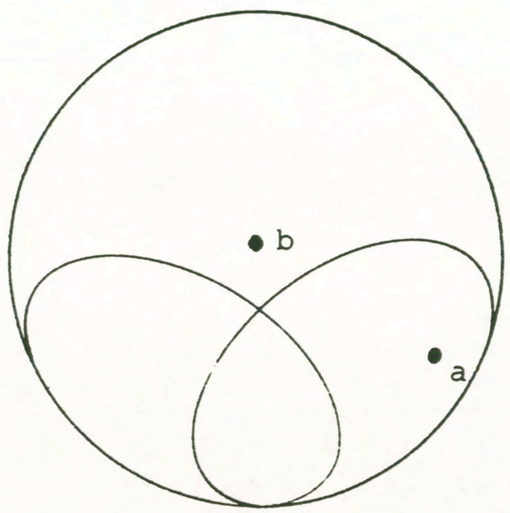


Plaçons encore b en les deux éventualités

a informateur <u>non mutuel</u> de b

$a < b \overline{<} a$

où $\overline{<}$ signifie NON $<$

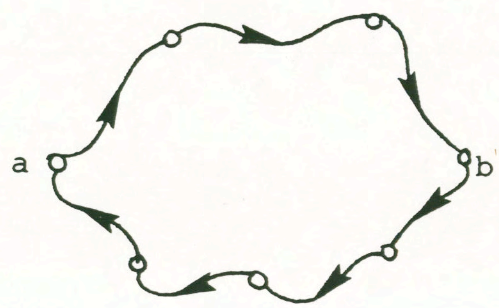


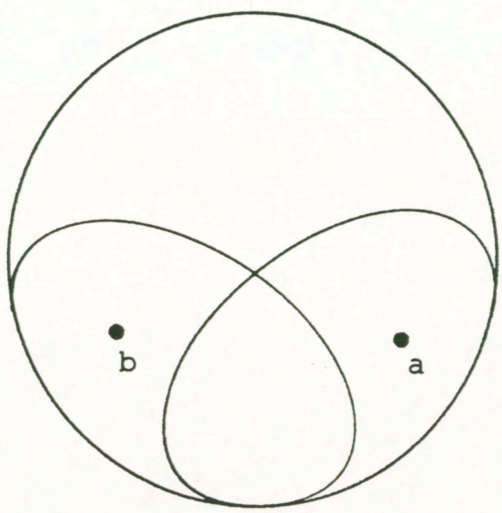
a et b <u>informateurs mutuels</u>

$a < b < a$

c'est-à-dire

sommets concycliques

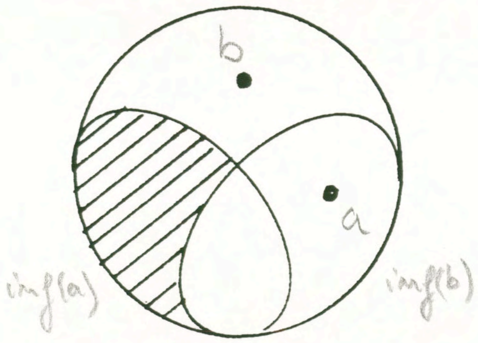


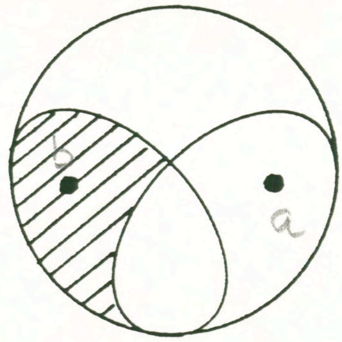


Tout informateur de a , différent de b

étant informateur de b,

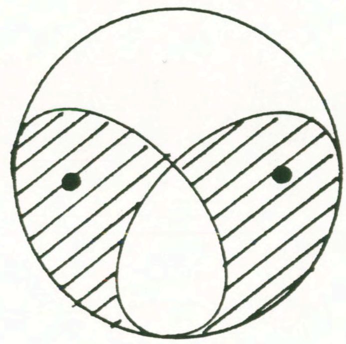
suit





où les hachures d'une plage disent tous ses habitants marqués

Par symétrie



d'où

$p(a) < p(b)$: $p(a) = p(b)$

Donc, pour tous sommets de graphe

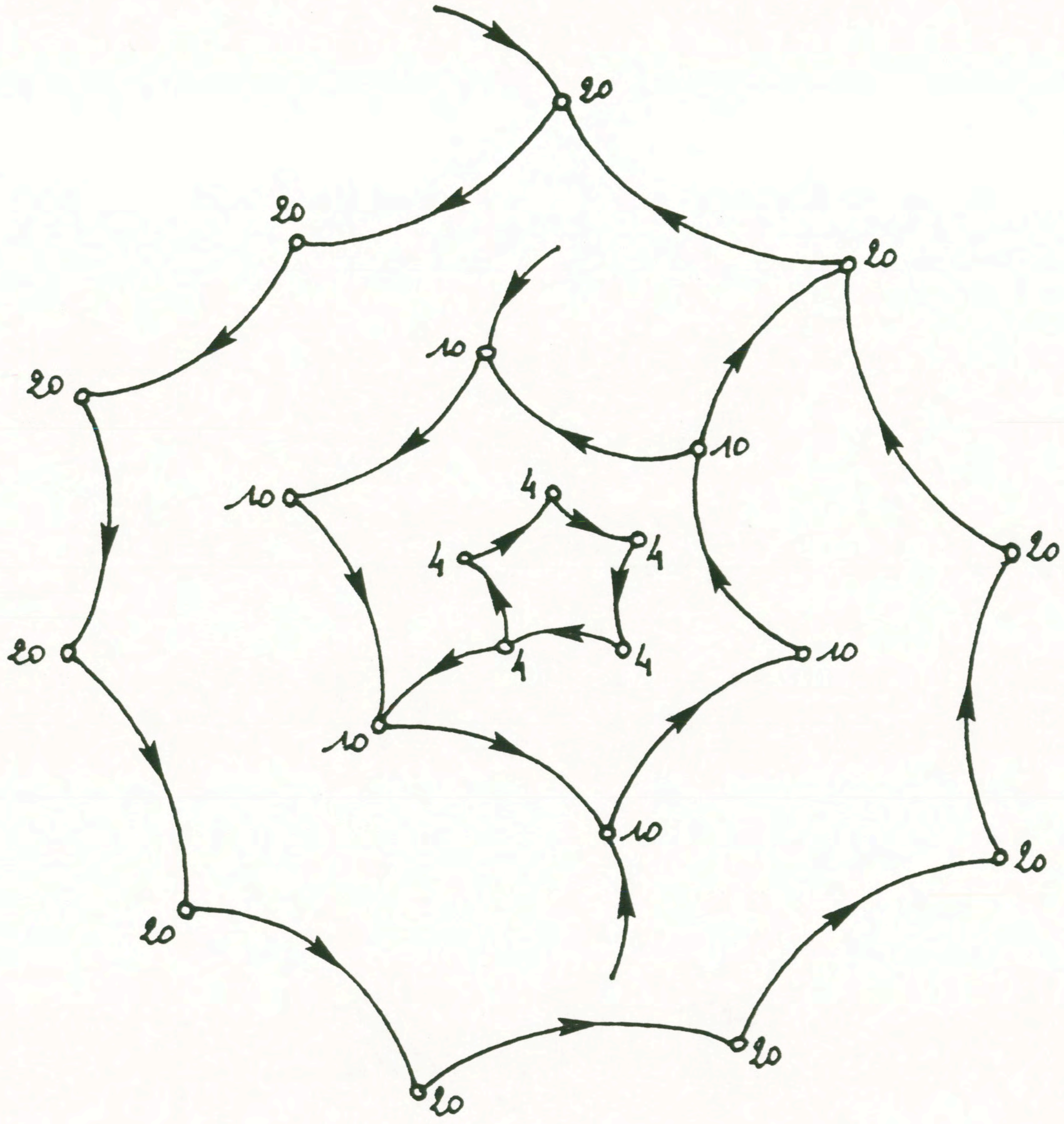
$$a < b \;\overline{<}\; a \quad ==> \quad p(a) < p(b)$$

$$a < b < a \quad ==> \quad p(a) = p(b)$$

et dès lors

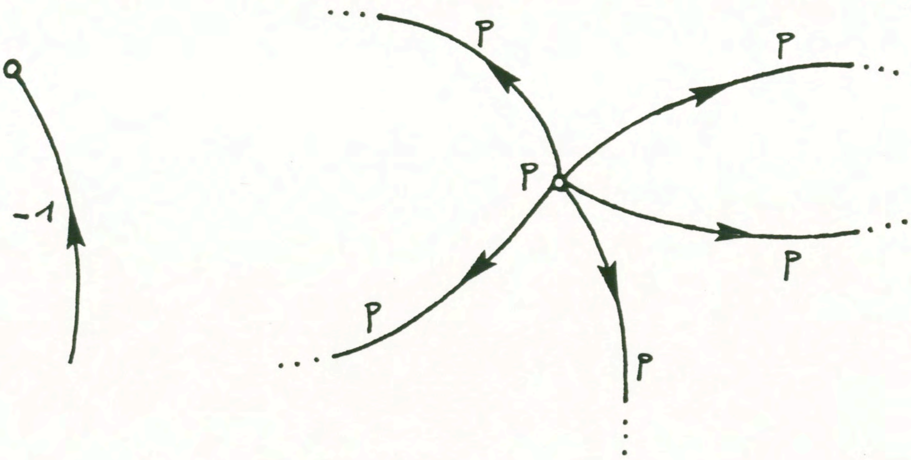
$$a < b \quad ==> \quad p(a) \leq p(b)$$

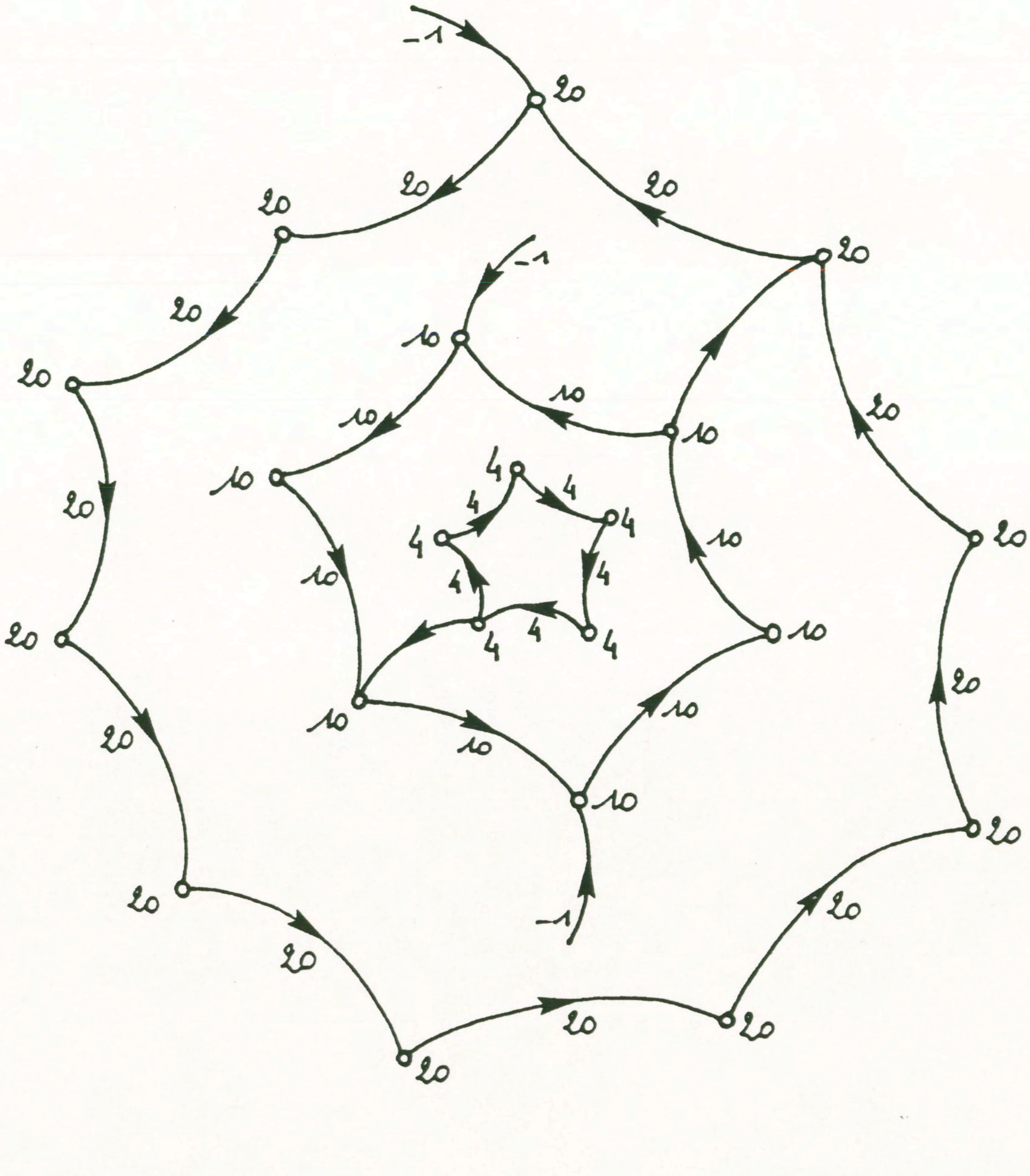
Si l'on se promène en graphe en suivant le sens des flèches, le poids des sommets n'est jamais décroissant strict et ne reste constant que sur ses cycles.

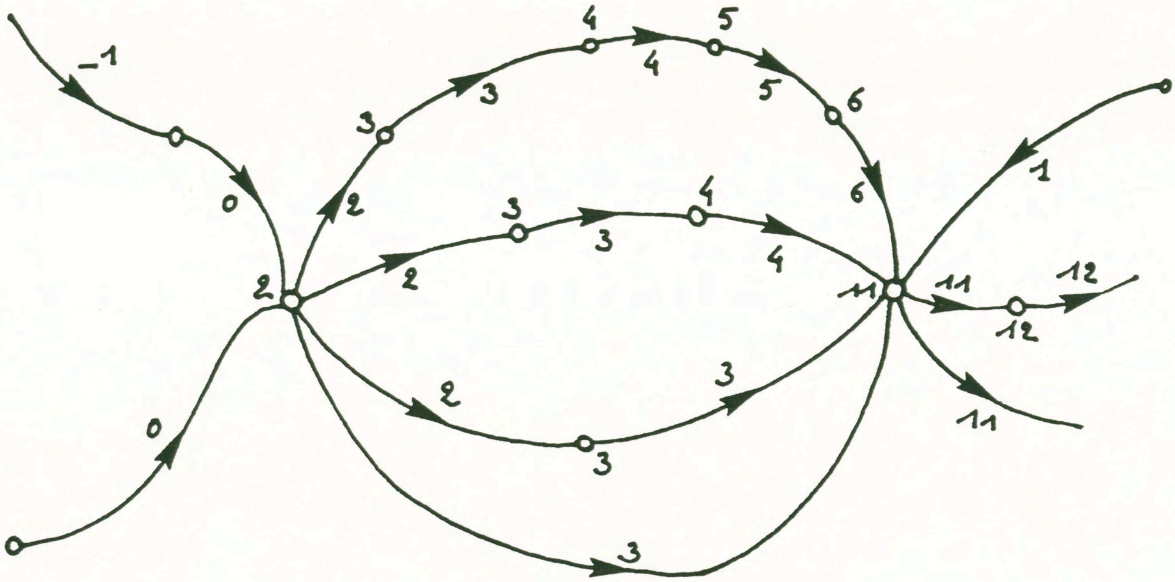


<u>Théorème **3**</u> Tous sommets a < b d'un graphe vérifient p(a) $\leq$ p(b), l'égalité ayant lieu si et seulement si a et b sont concycliques. En graphe sans cycle (non nul!) le poids est croissant strict: a<b entraîne p(a)<p(b)

Toute flèche non sensorielle se <u>pondère</u> en prenant le <u>poids</u> de son origine et toute flèche sensorielle s'attribue le <u>poids</u> -1.







Le théorème 3 entraîne aussitôt

<u>Théorème 4</u> En tout sommet de graphe le poids des sorties égale au moins chacun des poids des entrées. En sommet de graphe sans cycle (non nul) le poids des sorties est strictement plus grand que chacun des poids des entrées. ■

*

* *