

# Liberté créative dans l'enseignement de la mathématique

FREDERIQUE

Bruxelles

---

## Introduction

Invitation à la liberté créative au travers d'une expérience vécue, ce texte n'a aucune prétention théorique. Il s'adresse à l'intuition du lecteur, à sa sensibilité, à son imagination, à son amour de l'enfant. Il est l'expression d'une pensée en marche, très partiellement formulée. Bien des choses non dites se cachent entre les lignes et restent à être découvertes par le lecteur comme par l'auteur.

Si ce document ouvre une porte, il pose cependant plus de questions qu'il n'en résout. Notre espoir est qu'il soit reçu comme un écho d'une pédagogie créative et qu'il éveille d'autres échos.

\*  
\* \*

De nombreuses publications (1) ont présenté les résultats pédagogiques de notre longue expérience d'enseignement de la mathématique moderne de 4 à 20 ans.

Néanmoins, ces travaux ne laissent pas toujours percevoir les raisons des résultats obtenus, parce que celles-ci sont essentiellement d'ordre psychologique. Le but de ce texte est de tenter bien imparfaitement de pallier cette lacune.

\*  
\* \*

Enseigner la mathématique, ce n'est pas uniquement

communiquer d'importantes structures de la pensée rationnelle,  
initier à des techniques de calcul,  
rendre l'élève apte à mathématiser une situation et à résoudre  
des problèmes,

éveiller et aiguïser sa curiosité en lui lançant d'incessants  
défis,

lui apprendre à formuler des questions et à énoncer des faits

---

(1) Voir bibliographie placée en fin du texte.

et des conclusions,

le rendre capable de décider par lui-même de la validité d'un résultat, qu'il s'agisse d'un calcul ou d'une démonstration.

Enseigner la mathématique, c'est aussi

contribuer à l'épanouissement de la personnalité humaine de l'enseignant et de l'enseigné,

les rendre tous les deux conscients de leurs potentialités créatives,

les rendre responsables de leurs réalisations,

leur apprendre à s'écouter mutuellement,

leur ouvrir le chemin de la liberté : liberté d'expression, de décision, d'observation, d'analyse, de critique de la société dans laquelle ils vivent,

en faire des êtres capables d'atteindre le plus haut niveau dans la communication.

\*  
\* \*

La liberté créative préoccupe aujourd'hui philosophes, théologiens, sociologues, pédagogues, psychologues, psychiatres, romanciers, poètes, sculpteurs, esthètes, musiciens ..., et alimente une abondante littérature.

Aux adultes et aux enfants s'ouvrent partout dans le monde

des ateliers d'expression libre orientés vers la peinture, le modelage, la céramique, la danse, le chant, ...

des clubs de naturalistes, de philatélistes, d'amis du rail, ...

des groupes de rencontre s'intéressant à la créativité dans les relations interpersonnelles (groupes de sensibilisation, ...)

Mais dans ce concert d'ouvrages et de réalisations, la mathématique est restée une parente pauvre. Peu d'adultes ont perçu qu'elle pouvait être, elle aussi, une voie conduisant à l'épanouissement de la personnalité et à la libération de son énergie créative.

\*  
\* \*

Les pages qui suivent veulent mettre en évidence quelques facteurs permettant de tendre vers ce résultat par un enseignement mathématique adéquat. Le problème est étudié sous 7 angles différents

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| 1 | Le temps                  |
| 2 | Maison de la mathématique |
| 3 | Langages graphiques       |
| 4 | Pédagogie des situations  |
| 5 | Calcul                    |
| 6 | Expression picturale      |
| 7 | Affectivité               |

adoptés pour des raisons de commodité et d'une manière assez arbitraire ou subjective. Bien d'autres points de vue pourraient être envisagés.

## 1. Le temps

Pendant 20 années (1), j'ai enseigné la mathématique (traditionnelle, puis "moderne"), à des élèves de 6 à 20 ans, dans le cadre de programmes préétablis par des autorités scolaires et j'ai dû me plier aux contraintes des examens et des notes. Sans exception, j'ai toujours manqué de temps pour atteindre le terme du programme et, chose plus grave, j'ai surtout manqué de temps pour laisser les élèves explorer librement tel ou tel chemin qui les fascinait et qui prolongeait la matière du cours proprement dit.

Pendant ces 6 dernières années au contraire, j'ai eu la responsabilité de mener de 6 à 12 ans une classe non sélectionnée d'école primaire, sans devoir me plier à la lettre d'aucun programme. J'avais accepté une seule contrainte : faire acquérir par mes élèves les techniques de calcul usuellement enseignées à l'école primaire et les rudiments de système métrique traditionnellement présentés. Mais ce bagage est si léger qu'il n'a jamais pesé sur notre travail.

Pour la première fois dans ma vie de professeur, j'ai enseigné la mathématique avec l'impression libératrice d'avoir l'infini du temps à ma disposition. De ce fait, j'étais totalement ouverte à l'aventure que nous allions vivre.

Les résultats sont étonnants. Jamais pressée, jamais anxieuse d'avoir réussi à enseigner telle ou telle matière et pourtant ... je me suis rendu compte à posteriori de la densité, de la richesse, de la variété

---

(1) De 1947 à 1967

des notions, techniques et faits mathématiques assimilés par les enfants.

Comment expliquer ce paradoxe ?

Avoir l'infini du temps devant soi, cela signifie :

penser, vivre, exemplifier une notion mathématique au rythme de chacun,

poser et se poser des questions sans devoir en fournir la réponse immédiate,

entrer en contact avec quelques grandes structures de la mathématique d'aujourd'hui par une longue démarche naturelle, progressive et combien enrichissante,

flâner dans des sentiers conduisant à des situations moins fondamentales mais qui débouchent parfois sur des idées neuves et profondes.

Avoir l'infini du temps devant soi,

ce n'est pas appauvrir le contenu d'un programme de manière à en limiter les contraintes,

c'est, en fait, supprimer **tout** programme, mais mener l'enseignant au plus haut niveau de communication et de responsabilité.

## 2. Maison de la mathématique

Construire avec l'aide des adolescents, et puis celle des enfants, une maison de la mathématique a été l'un de nos objectifs au cours de ces 15 dernières années (1)

Dans quelle mesure l'existence d'un cadre unificateur constitue-t-il un facteur favorable au développement de la créativité ? J'y répondrai à l'aide d'images.

A la mathématique traditionnelle, j'associe un super-marché américain en face duquel j'ai vécu pendant plusieurs semaines. Bâtiment sans poésie, sans couleur, sans fenêtre, offrant au consommateur un ensemble de produits utiles pour satisfaire les besoins les plus

---

(1) La reconstruction de l'édifice mathématique au niveau secondaire est présentée par PAPY, notamment, dans ses ouvrages [MM], [F] et [G]. Inspirés par ces travaux, [EG] et [EM] proposent une réédification au niveau primaire.

Les crochets renvoient à la bibliographie placée en fin du livre.

immédiats de sa vie quotidienne, organisé en un ensemble de départements présentant peu de liens entre eux, offrant une gamme d'outils certes nécessaires mais ne permettant que des dépannages locaux ou des constructions sans envergure. Cet édifice ne ressemble-t-il pas étrangement aux programmes traditionnels primaires ? L'objectif de ceux-ci se limitait à communiquer un certain nombre de recettes de calcul et quelques faits mathématiques utiles dans la vie courante, sans se préoccuper de mettre en évidence les liens unificateurs qui les éclairent et sans ouverture sur la mathématique vivante en constante mutation.

La maison de la mathématique de notre enseignement n'est pas une construction futuriste mais une demeure confortable, colorée, offrant lieux de rencontre et d'échanges, coins de recueillement et de réflexion, laboratoires où s'expérimentent quelques machines-outils simples, bien sélectionnées.

Au maître, ce cadre permet de mieux saisir le cheminement et les perspectives de son enseignement.

A l'élève, la structure unitaire offre sécurité et confort, éléments favorables au développement de l'intelligence et de la connaissance en mathématique.

### **3. Langages**

Nous examinerons successivement et séparément le rôle joué, dans un enseignement créatif, par la langue maternelle et par certains langages graphiques.

La plupart des manuels scolaires de mathématique (au niveau primaire comme au niveau secondaire) sont rédigés dans une langue pauvre, imprécise et désuète.

Il s'agit davantage d'un patois créé aux fins de communiquer un ensemble de recettes et de techniques, plutôt que de la belle langue maternelle apte à véhiculer une pensée plus profonde. Ce jargon est complètement étranger à la langue naturelle, synthétique, vivante et imagée de l'enfant.

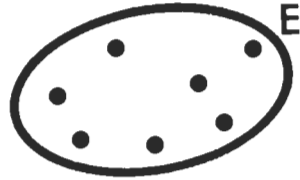
Comment encourager l'expression spontanée de la pensée enfantine, savoureuse, percutante, rarement imprécise en dépit de son apparente naïveté ?

Par *notre* silence et par *notre* écoute.

Deux exemples pris sur le vif :

1. Troisième année primaire (8 à 9 ans). Nous nous proposons d'initier à la négation d'une proposition quantifiée. Voici le début de la discussion engagée entre les enfants et nous-même [EM3, pp 360-361]

- Nabuchodonosor dessine l'ensemble E



et dit : "Tout élément de E est un chien".

Mais Nabuchodonosor est un farceur. Il n'a pas dit vrai.

Qu'en déduisez-vous ?

- Ça ne peut pas être des chiens !

- Aucun élément ?

- Peut-être.

- Il y a quelques chiens mais pas tous des chiens.

- Il ne peut pas y avoir que des chiens !

- Autrement dit ?

- Il y a autre chose que des chiens !

- Soyez encore plus précis.

- Il y en a au moins un qui n'est pas un chien !

- Ou au moins deux !

- Quelle est la meilleure réponse ?

- Au moins un ! entonne le chœur de la classe.

- Nabuchodonosor m'avait communiqué son message en utilisant un signe secret :

## $\forall$ = pour tout

- Il avait écrit :  $\forall x \in E$  x est un chien

ce qui se lit : Pour tout élément x de E :  
x est un chien

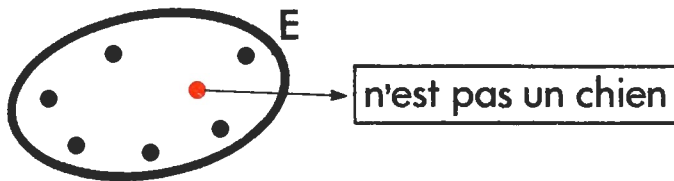
ou de manière équivalente : Tout élément de E est un chien

- Mais ce n'est pas vrai !

- Oui ! Et vous en avez déduit ...

- Il y en a au moins un qui n'est pas un chien.

- Sur le diagramme, marquons en rouge cet élément que nous savons ne pas être un chien.

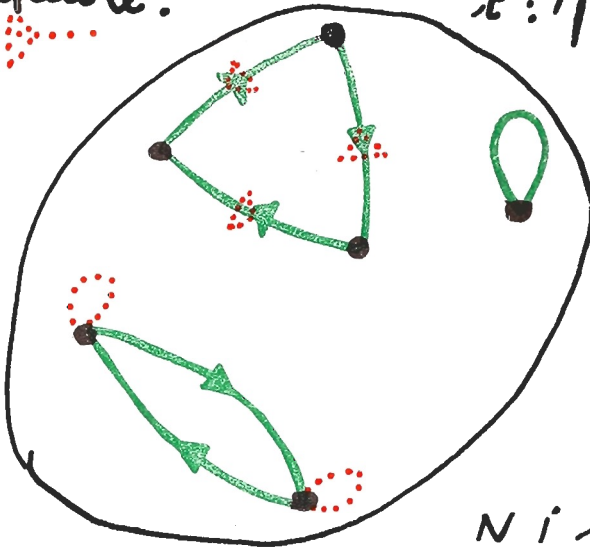


Ce dialogue bref, sobre, dense, où la classe parle plus que le maître, où la pensée du groupe se précise naturellement et progressivement, conduit en peu de minutes au coeur du sujet et à la mise en évidence de la notion d'*élément coupable*, si judicieusement introduite par PAPY dans [F3] pour résoudre les difficultés que pose la négation de propositions quantifiées, notamment dans un premier enseignement de l'analyse.

Quelques semaines plus tard, soumettant un graphe à un *test de transitivité*, Nicolas (8 ans) introduit une convention graphique aussi amusante qu'intéressante pour indiquer toutes les culpabilités par carence de flèches [EM3, p. 215]

*coupable.*

*t: non!!!*



*NICOLAS*

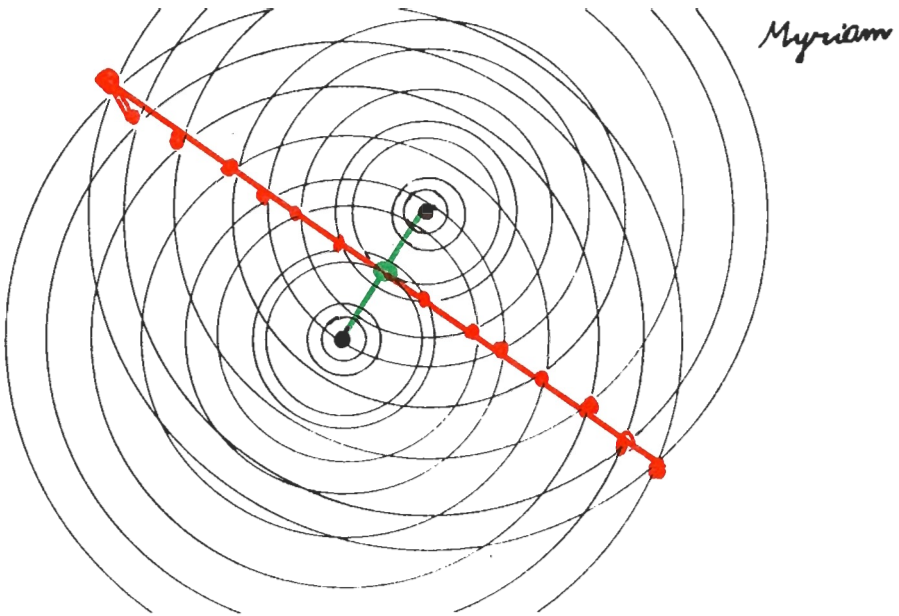
Cette création enfantine n'est-elle pas le meilleur signe d'une véritable compréhension .

2. Six mois plus tard, dans la même classe.

La découverte encore toute fraîche de l'instrument magique que constitue le compas, provoque une nouvelle exploration du plan [EM3, pp.360-361]

- Sur votre feuille, dessinez des points a et b dont la distance égale 5 cm. Construisez un cercle de centre a et un cercle de centre b de même rayon. Marquez en rouge le ou les éventuels points d'intersection. Recommencez l'opération en changeant le rayon des cercles.
- Oh, c'est joli !
- Pour qu'ils se coupent, il ne faut pas les faire trop petits.
- J'ai une remarque, Madame ! Ça va faire une ligne droite.
- Madame, les points deviennent de plus en plus éloignés les uns des autres !
- On dirait un hibou !
- Tous les points rouges sont en ligne droite !
- Si on les a bien dessinés !
- Je vois une croix !
- Oui, la droite rouge et celle qui joint les deux centres sont perpendiculaires.





- Madame, quand on prend une ouverture de compas de 2,5 cm, c'est la limite; les cercles se touchent.
- Ils se touchent juste à l'endroit où les droites perpendiculaires se croisent.
- L'intersection de ces deux cercles comprend un seul point.

"Oh, c'est joli" est le premier cri du coeur, révélateur des vertus mathématiques de l'esthétique.

Alternent ensuite remarques d'ordre mathématique qui décrivent avec une précision sans cesse accrue les propriétés caractéristiques de la situation dessinée, et observations subjectives comme

*"On dirait un hibou !"*

accueillies avec une égale sympathie.

La liberté laissée à l'enfant de traduire, à son niveau et dans son langage familier, les images, observations ou conclusions, de nature extrêmement variée, suscitées par une situation mathématique, me semble un facteur essentiel au développement de sa créativité.

Ce respect de la spontanéité de l'élève n'interdit pas au maître certaines interventions. Lorsqu'une proposition vraie est découverte par la classe et exprimée dans une langue naïve, avec une certaine maladresse, il convient de l'accepter, tout en la reformulant en le vocabulaire technique précis. Ainsi s'introduisent, sans aucun commentaire de la part de l'enseignant, des vocables nouveaux dont la signification est découverte de manière naturelle et progressive.

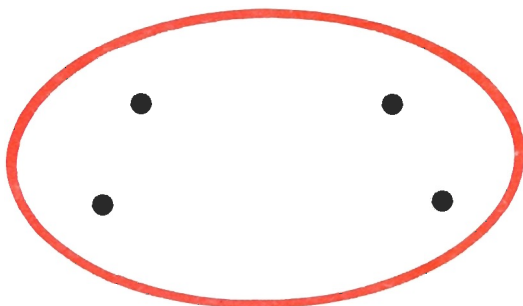
Les langages graphiques actuellement à notre disposition dans l'enseignement de la mathématique dès le plus jeune âge, sont des supports de la pensée rationnelle qui naît souvent d'une intériorisation imagée. Leur utilisation est l'un des éléments les plus favorables à l'épanouissement de la liberté créative.

Langages universels de la mathématique ensembliste et relationnelle de notre temps, les diagrammes de VENN et les papygrammes sont accessibles dès 3 à 4 ans.

*Première leçon dans une classe maternelle (4 ans) [E.L.]*

L'entretien familial du matin a porté sur les écureuils, animaux sympathiques aux enfants.

- Je dessine des écureuils dans cette corde rouge.



- Combien d'écureuils ?

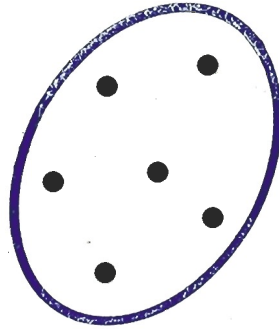
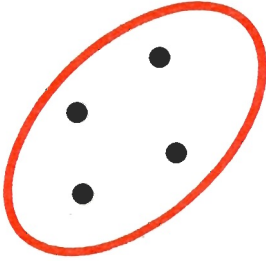
Réponse immédiate : *Ils sont 4.*

Ce diagramme de VENN est introduit et accepté sans le moindre commentaire. Les élèves n'ont manifesté aucune surprise à voir représenter leurs charmants amis par de beaux gros points noirs.

- Ces écureuils ont faim. Que vont-ils manger ?

- *Des noisettes*, suggère le choeur de la classe.

- Je les dessine dans une corde bleue

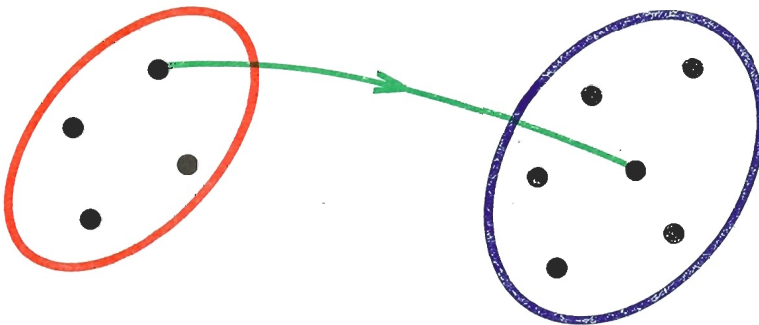


Combien de noisettes ?

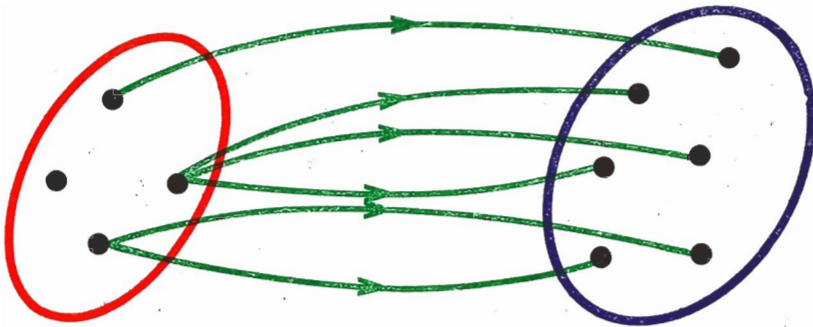
Nullement étonnés de voir les noisettes représentées, elles aussi, par des points noirs, les enfants les comptent, avec quelque maladresse.

J'enchaîne :

- Cet écureuil a mangé cette noisette



Sans mot dire, je complète ce papygramme.



- Quel est l'écureuil le plus gourmand ?

Un enfant montre immédiatement le point noir, origine de 3 flèches vertes.

- Pourquoi est-il le plus gourmand ?

- Car il a mangé 3 noisettes, explique Olivier en mimant les 3 flèches.

Un dialogue fait de beaucoup de gestes et de peu de paroles s'engage entre la classe et le dessin abstrait.

S'aidant de la gestuelle, les enfants racontent et vivent l'histoire. Montrant le point d'où ne part aucune flèche, Sandra commente avec une certaine anxiété :

- Cet écureuil n'avait pas faim. Mais tout à l'heure, il aura faim et alors, il ne restera aucune noisette.

Quelques semaines plus tard, le même graphe abstrait présente une autre situation. La corde rouge entoure des traîneaux et la bleue, des chiens. Toute flèche verte nous dit : Ce traîneau est tiré par ce chien.

Les enfants amplifient concrètement l'histoire :

- Ce traîneau est très lourd; il est tiré par 3 chiens.

- Celui-ci, plus léger, est tiré par un seul chien; ... etc.

Ils montrent avec insistance le point d'où ne part aucune flèche.

Je suggère :

- Les chiens n'étaient pas assez nombreux. Sans doute a-t-on mis ce traîneau au hangar.

Solution peu satisfaisante pour la classe qui implore :

- *Dis, dessine encore un chien ! Il ne te faut qu'un tout petit peu de craie !*

Bien que la frustration des enfants soit grande, je n'ai pas obtempéré à leur demande. A un moment donné, ne faut-il pas apprendre à accepter et à analyser une situation telle qu'elle se présente ?

Un graphe abstrait peut être le support d'une multitude d'histoires. Ce fait important est vécu dès 3 à 4 ans. A 5 ans, l'enfant acquiert un nouveau degré de liberté. Placé face au dessin dont il vient de voir qu'il peut signifier bien des choses, il est capable d'inventer d'autres histoires compatibles avec ce graphe.

Ainsi, Laurence, 5 ans, raconte

- *Des camions et des voitures; les flèches disent que les camions ont eu des blouch (1) avec les voitures.*

Elle parcourt correctement chaque flèche en disant :

- *Ce camion a eu un blouch avec cette voiture.*

et ajoute en montrant le point seul :

- *Cette voiture n'a pas eu de blouch avec un camion.*

Renaud, 5 ans :

- *L'enfant va à la maison, il a une soeur qui va aussi à la maison et un frère qui va aussi à la maison.*

*Ça, c'est un enfant qui va à la maison et l'autre enfant va à la même maison.*

*Il y a une maison qui n'a pas d'enfant, une maison comme une église*

---

(1) Mot du terroir bruxellois. Il signifie "accrochage".

*car elle n'est habitée par personne (1)*

Bien plus, dès cet âge, l'enfant est capable de trouver "un *autre* graphe qui traduise une situation qu'il a envie de raconter" [NICO 10, p. 139].

\*<sup>16</sup>  
\* \*

Le papygramme est un langage qui permet de raconter des histoires mathématiques à de jeunes enfants. Nous venons d'en faire la démonstration dans le cadre d'un enseignement collectif à l'école maternelle.

Ce langage nous a inspiré plusieurs contes écrits à l'intention de lecteurs de 4 à 99 ans [Collection PAPY]. Ces petits ouvrages communiquent un contenu mathématique sous forme de messages graphiques soutenus par quelques courtes phrases. Ils font appel à la collaboration constante du lecteur.

Une étude faite par Odette COLLARD utilisant la méthode clinique (2) révèle que ces textes dépouillés de tout verbalisme, présentent des images mathématiques qui parlent d'elles-mêmes et provoquent un dialogue créatif entre le lecteur et le schéma abstrait.

\*<sup>16</sup>  
\* \*

Le papygramme est aussi un merveilleux moyen d'exploration et de résolution de problèmes.

*Dans une classe de deuxième année primaire (7 ans) [EM2, p. 224]*

- Nabuchodonosor joue avec une boîte contenant 40 allumettes. Il s'amuse à les disposer sur la table en petits paquets de 3, dessinant la lettre H. Combien de lettres formera-t-il ?

Après quelques minutes de réflexion, Nicolas me remet ce dessin

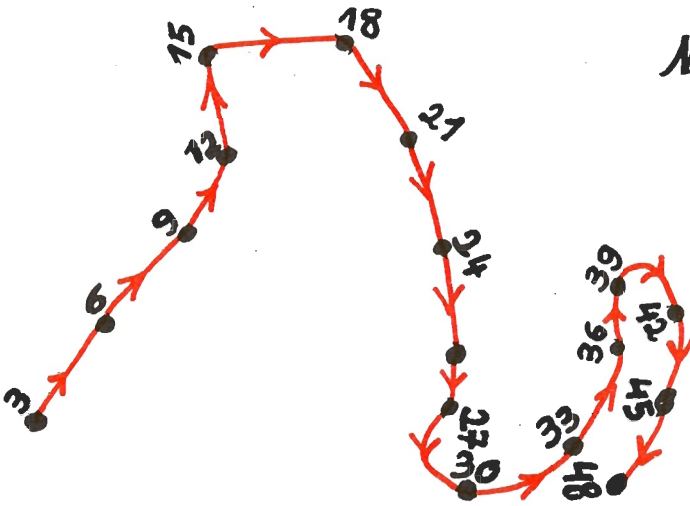
---

(1) Extraits recueillis par Anne DIEUDONNE-VAN HALTEREN dans une recherche utilisant la méthode clinique.

(2) [NICO 7, pp. 29 à 52], [COLLARD]

+3

Nicolas

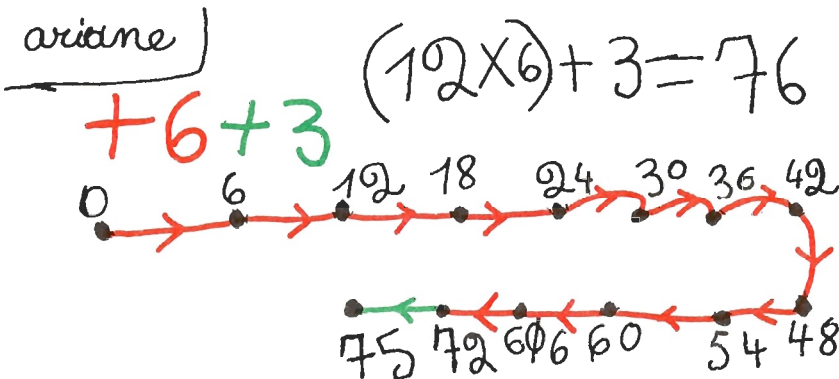


et fournit oralement la réponse exacte.

Personnellement, je n'avais pas songé à utiliser un graphe de la fonction + 3 pour résoudre ce petit problème. Mais familiarisé avec ce langage graphique depuis plus d'un an, Nicolas traduit spontanément la situation concrète imaginée dans le langage mathématique adéquat, grâce auquel il découvre aisément la réponse. Toutefois, le seul graphe de la fonction + 3 ne permet pas de traduire fidèlement la réalité. La flèche allant de 39 à 42, passe à côté du but.

Quelques jours plus tard une importante découverte est faite par Ariane (7 ans)

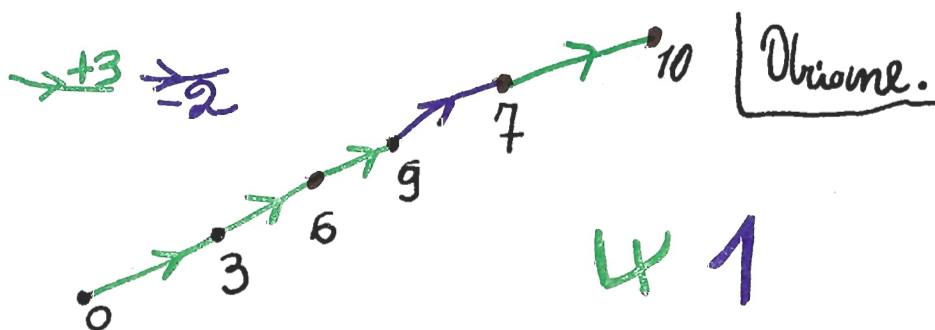
- La maman de Nabu lui demande de ranger 75 bouteilles vides dans des petits paniers de 6 bouteilles. Combien de paniers remplira-t-il ?



Ariane adopte la suggestion de Nicolas et utilise un graphe de la fonction  $+ 6$  pour mathématiser le problème. Mais en introduisant la fonction "reste"  $+ 3$ , dessinée en vert, elle réalise un nouveau progrès et fournit cette fois un modèle parfait de la situation, qu'elle traduit ensuite de la manière algorithmique usuelle. Tellement absorbée par sa création, Ariane commet in extremis une erreur d'écriture.

Quelques jours plus tard, nouvelle découverte :

- Ce dimanche après-midi, Nabu a joué au tric-trac avec son bon-papa. Chaque fois qu'il gagnait, il recevait 3 F; chaque fois qu'il perdait, il devait donner 2 F. Après avoir jouer de nombreuses parties, notre ami a gagné 10 F. Pouvez-vous imaginer un déroulement possible pour cette suite de jeux ?



En ce dessin, tout est pensé et dit sans paroles :

Comment mathématiser le problème à l'aide des fonctions  $+ 3$  et  $- 2$ .

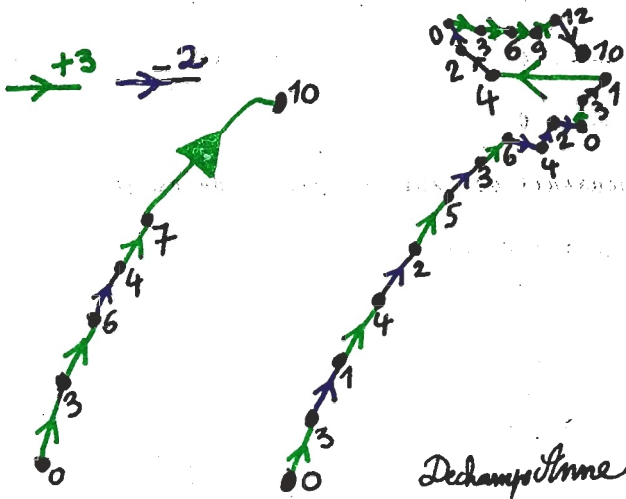
Comment créer un chemin vert-bleu allant de 0 à 10.

La réponse finale éclate en les deux nombres 4 et 1 écrits *grands* et respectivement, dans la couleur des victoires et des défaites.



Sylvie observe :

- J'ai trouvé la réponse sans dessiner. J'ai pensé dans ma tête  $(4 \times 3) = 12$  ;  $12 - 2 = 10$ . Donc 4 victoires et 1 défaite.
- Très bien ! Note cependant que le dessin d'Ariane te donne une information supplémentaire. Il indique dans quel ordre les parties ont été gagnées et perdues. De plus, le langage des graphes te conduira peut-être à de nouvelles réponses.



Anne (7 ans) l'a fort bien compris. Elle fournit deux solutions. Son premier dessin est semblable à celui d'Ariane, à l'ordre des flèches près. Le deuxième, qui commence par une séquence rythmée rapidement abandonnée, conduit à plusieurs reprises au nombre 0 et montre de toute évidence qu'Anne entrevoit l'existence d'une infinité de solutions.

Sans le support des graphes, une telle découverte eut-elle été possible à 7 ans ?

\*  
\* \*

Décrire une situation vécue ou imaginée dans un langage graphique approprié, l'appréhender ensuite en d'autres langages, la comprendre de mieux en mieux au travers de ces mutations successives, en faire éclater des conclusions de plus en plus inattendues, me semblent des éléments importants dans le développement de la créativité mathématique. C'est ce que veulent illustrer les pages suivantes.

Dans une classe d'enfants de 9 à 10 ans [EM4, ch. 16, § 5]

- Ariane, Carine, Didier, Jean-Jacques, Nicolas, Philippe et Sylvie pensent chacun un nombre de l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Et s'il y a des enfants qui pensent le même nombre ?

- C'est possible, évidemment. Quels nombres avez-vous pensés ?

- Ariane  $\longrightarrow$  3

Nicolas  $\longrightarrow$  2

Carine  $\longrightarrow$  6

Philippe  $\longrightarrow$  0

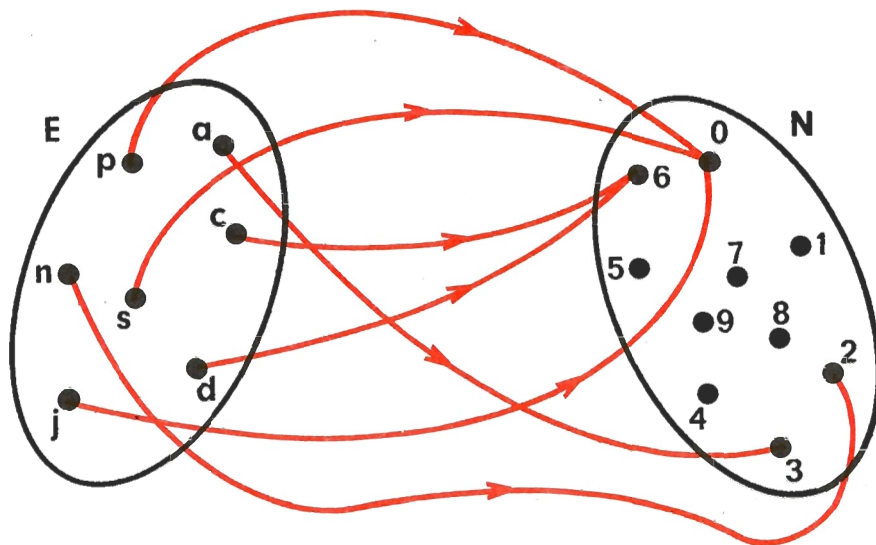
Didier  $\longrightarrow$  6

Sylvie  $\longrightarrow$  0

Jean-Jacques  $\longrightarrow$  0

- Madame ! On pourrait dessiner un graphe de ce jeu !

- Moi, je l'ai fait ! Voici



D'emblée, les enfants ont opté pour un langage graphique approprié qui, dans son dépouillement, décrit parfaitement la situation.

- Comment traduire ce graphe en un tableau à double entrée ?

- 7 lignes ! 10 colonnes !

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a				●						
c							●			
d							●			
j	●									
n			●							
p	●									
s	●									

C'est moi qui ai suggéré l'introduction d'un deuxième langage, celui des diagrammes cartésiens.

Immédiatement adopté par la classe, il est utilisé sans difficulté. La suite du dialogue montre que les élèves manient avec aisance ces deux langages qui leur permettent d'exprimer avec une égale clarté le caractère fonctionnel de la relation étudiée.

- C'est une fonction  $E \longrightarrow N$

- Oui, dans chaque ligne horizontale, il n'y a qu'un pion.

- La réciproque n'est pas une fonction !

- Les coupables sont 0 et 6 .

- Oui, en 0 et 6 arrivent plusieurs flèches !

- Dans les colonnes verticales de 0 et 6 , il y a plusieurs pions !

- Et si on recommençait le jeu ?

- Ce serait à peu près la même chose !

- Que veux-tu dire ?

- De tout point de E partirait une flèche !

- Dans chaque couloir horizontal, il y aurait un point !
- Ce serait une fonction !
- Et sa réciproque ?
- Cela dépend !
- La réciproque est une fonction si tous les nombres choisis sont différents.

Le moment est venu de lancer le problème combinatoire.

- Combien de graphes différents nos 7 amis pourraient-ils dessiner ?

L'enseignement traditionnel proposait ce problème dans les classes terminales de l'école secondaire (16 à 18 ans).

Sans les langages graphiques appropriés, les méthodes suggérées par le maître semblaient souvent artificielles, voire même peu convaincantes. Bien au contraire, nos élèves de 9 ans en découvrent sans peine la solution.

- Moi, je dis  $10 \times 7$
- Faux, c'est  $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
- Pourquoi ?
- Le premier enfant a le choix entre 10 colonnes.
- Cela fait 10 possibilités !
- Supposons le premier pion posé.
- Le deuxième enfant a aussi le choix entre 10 cases.
- Donc, pour les deux premiers pions,  $10 \times 10$  possibilités !
- Et pour le troisième, c'est la même chose !
- $10 \times 10 \times 10$  possibilités !

- Cela continue avec le quatrième, cinquième, sixième et septième !
- En tout  $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$  possibilités !
- 10 millions.
- 10 000 000 graphes différents, c'est incroyable !

Lorsque nous demandons de calculer le nombre de fonctions  $E \rightarrow N$ , les enfants choisissent le diagramme cartésien de préférence au papygramme, pour verbaliser la réponse. Dans l'élaboration du calcul, le langage cartésien semble s'avérer un meilleur support de la pensée. Essayons de comprendre pourquoi.

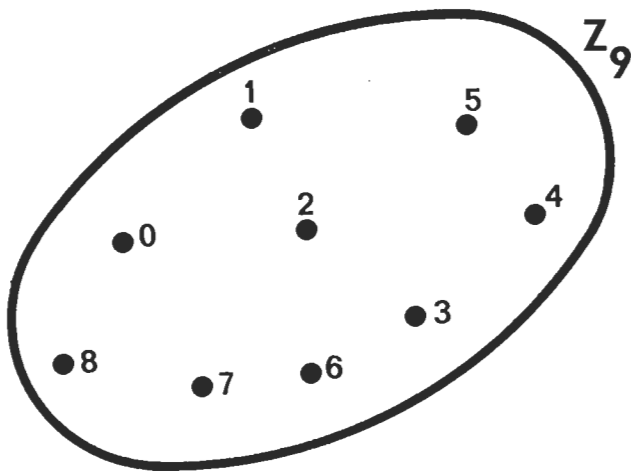
- Le premier enfant a le choix entre 10 colonnes.
- Cela fait 10 possibilités !
- Supposons le premier pion posé.
- Le deuxième enfant a aussi le choix entre 10 cases.
- Donc, pour les deux premiers pions, cela fait  $10 \times 10$  possibilités !

En langage cartésien, la liberté relative à la deuxième ligne n'est pas entamée quand on pose un pion dans la première. Au contraire, tracer la flèche qui traduit la pose de ce pion perturbe sensiblement le dessin tout entier.

\*<sup>3</sup><sub>x</sub>

Un dernier exemple montrera le rôle créatif du langage des papygrammes dans la découverte des propriétés d'une structure algébrique.

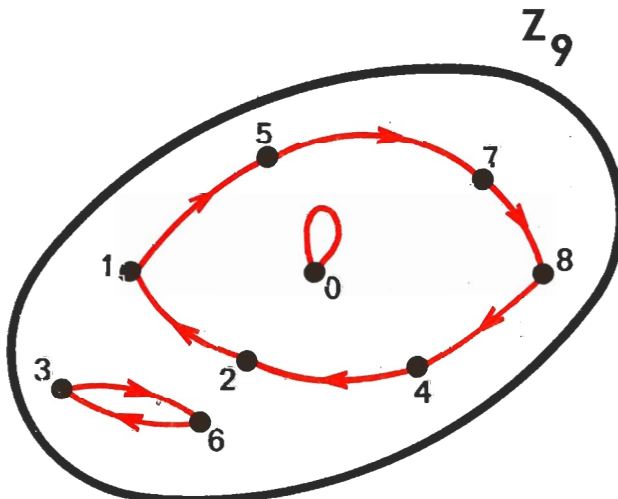
Dès 7 à 8 ans, les élèves ont été familiarisés avec l'addition et la multiplication modulo  $n$ . L'addition modulo 12 et l'addition modulo 60 leur ont dévoilé les secrets du calcul de la petite et de la grande aiguille d'une montre [JG]. En sixième année (11 à 12 ans), ils sont prêts pour l'étude du monoïde  $Z_9$ , \* où \* désigne la multiplication modulo 9 [EM6, Ch. 2, § 4]



- Calculez  $7 * 8$
- $7 * 8 = 2$
- Pourquoi ?
- Je sais !  $7 \times 8 = 56$  et le reste de la division de 56 par 9 est 2. Alors  $7 * 8 = 2$

Après quelques exercices de mise en condition, je propose de dessiner un graphe de la fonction  $5 *$  appliquant tout nombre  $x$  sur  $5 * x$

- C'est amusant, Madame !
- C'est un beau dessin !
- Voici



- C'est une permutation de  $Z_9$  !
- Oui, de tout point de  $Z_9$  part une flèche et en tout point, arrive une flèche !

Les élèves sont prêts pour l'épreuve majeure :

- Dessinez un beau graphe, le plus intelligible possible, de chacune des fonctions  $0_*$ ,  $1_*$ ,  $2_*$ , ...,  $7_*$ ,  $8_*$ . Observez, contemplez, classez.

La question est volontairement peu explicite.

En quoi consiste l'intelligibilité d'un graphe ?

Suivant quels critères faut-il classer ces fonctions ?

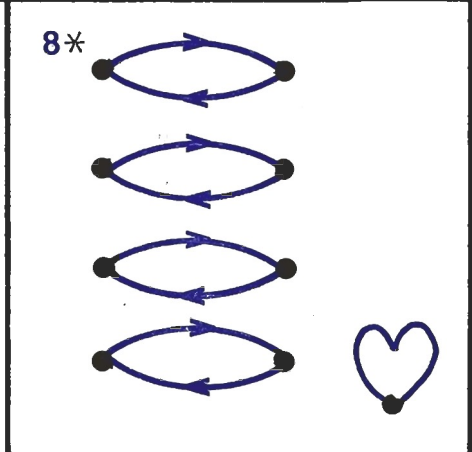
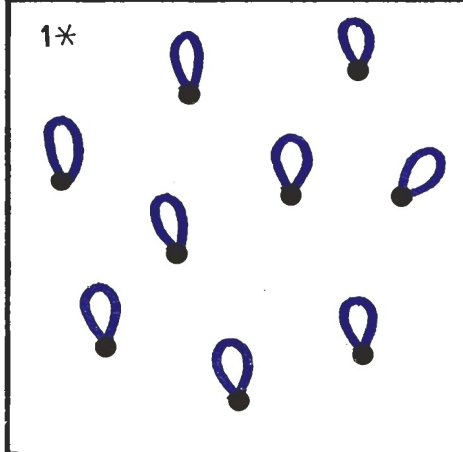
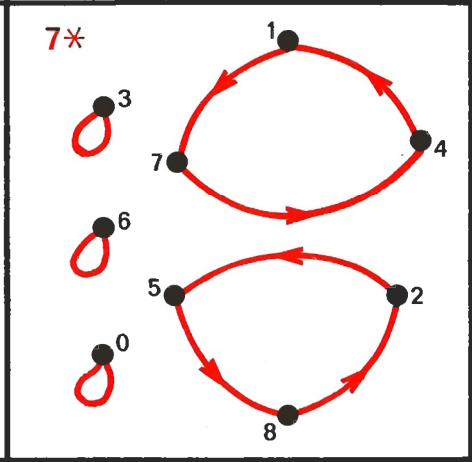
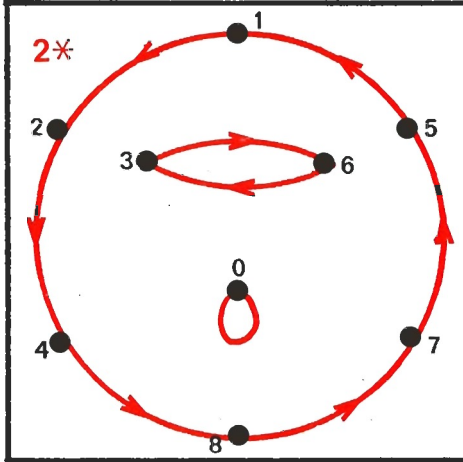
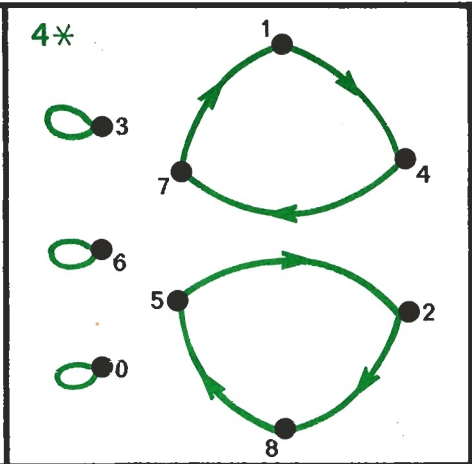
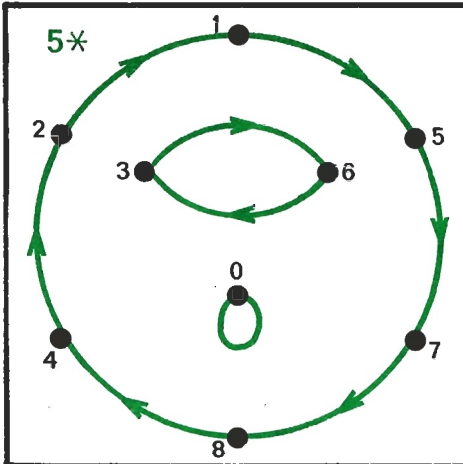
Toute liberté d'interprétation est laissée à l'enfant placé devant un problème ouvert où vont intervenir esthétique, maîtrise d'une technique de calcul, esprit d'observation et esprit de synthèse.

Les élèves travaillent par équipe de deux.

Très rapidement, ils établissent une première partition :

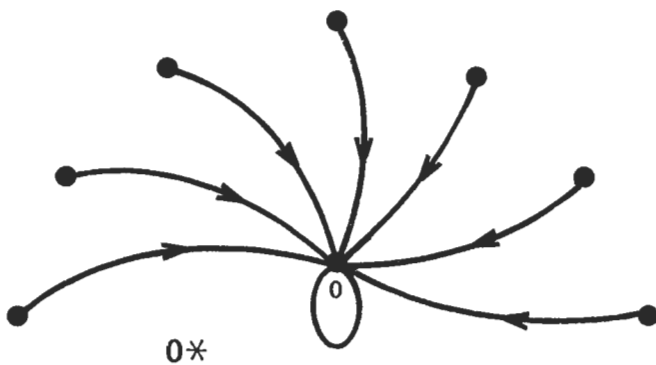
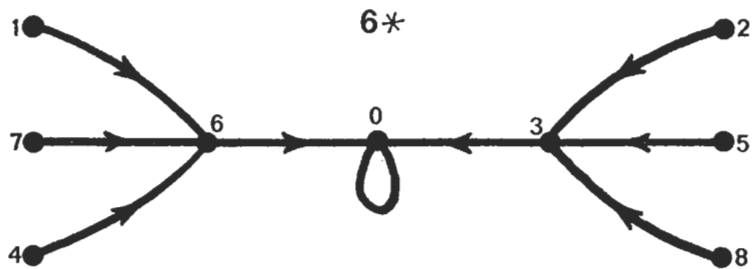
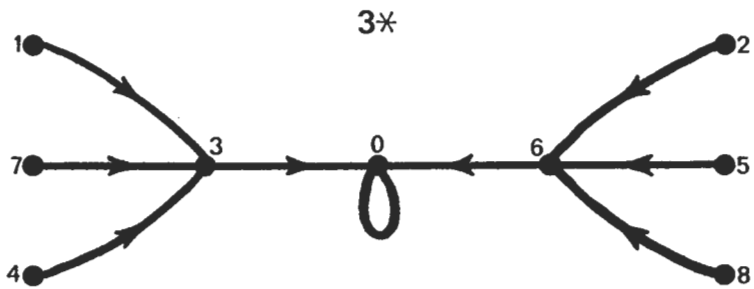
les 6 fonctions  $1_*$ ,  $2_*$ ,  $4_*$ ,  $5_*$ ,  $7_*$  et  $8_*$  sont des permutations de  $Z_9$ ,

tandis que les réciproques des trois autres :  $0_*$ ,  $3_*$ ,  $6_*$ , ne sont pas des fonctions.



Les 6 permutations





Les réciproques de ces trois fonctions ne sont pas des fonctions

Sans intervention de ma part, les enfants affinent cette première classification

- Madame ! Les permutations  $4 * 7$  et  $7 * 4$  sont réciproques l'une de l'autre !
- Pourquoi ? Il doit y avoir une raison !
- Moi, je sais ! Parce que  $4 * 7 = 1$ .
- De même,  $2 * 5$  et  $5 * 2$
- $8 * 8$  est sa propre réciproque
- Oui, car  $8 * 8 = 1$
- $1 * 1$ , ce ne sont que des boucles !
- $1 * 1$  égale sa réciproque.

et enchaînent

- Avec  $3 * 6$ , ce n'est pas la même chose. On n'aura jamais  $3 * a = 1$ . On le voit sur le graphe. La réponse est 0, 3 ou 6.

Les propriétés des éléments inversibles viennent d'être illustrées et renforcées par les papygrammes colorés.

- Dans  $Z_9$ , \* résolvez l'équation

$$\square * \Delta = 0$$

(les nombres cachés dans les boîtes étant supposés non nuls)

- Facile !  $3 * 6 = 0$
- Ou  $6 * 6 = 0$ , etc...
- Madame ! Avec les autres nombres, cela ne marchera pas. On le voit sur le graphe. En 0, arrive uniquement la boucle.

Nouveaux acteurs d'une structure algébrique, les *diviseurs de zéro* (non nuls) se présentent sous une forme particulièrement frappante pour les enfants.

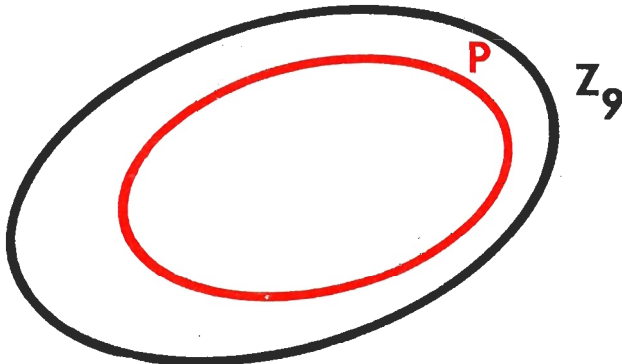
La question

$\mathbb{Z}_9, *$  groupe ?

relance l'étude du monoïde. Les réponses fusent :

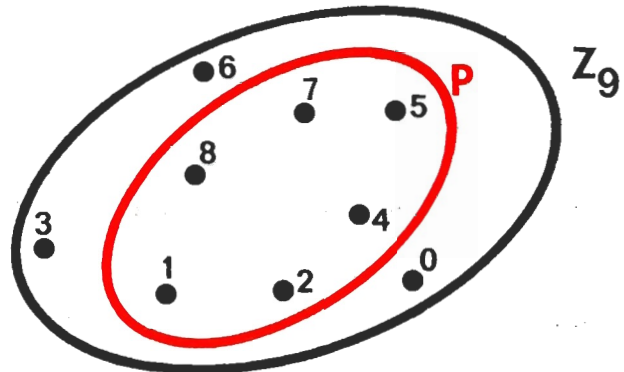
- Loi interne, oui !
- Associative, oui !
- 1 est neutre !
- $2 * 5 = 1 = 5 * 2$  ; 2 et 5 sont inverses l'un de l'autre !
- 4 et 7 aussi.
- $8 * 8 = 1$  ; 8 est son inverse.
- Madame ! 3 n'a pas d'inverse ! Jamais  $3 * x = 1$
- Et 6 non plus.
- Ni 0, évidemment !
- $\mathbb{Z}_9, *$  n'est pas un groupe. Les coupables sont 0, 3 et 6 .

Nouveau défi lancé cette fois par notre ami Nabuchodonosor qui dessine :

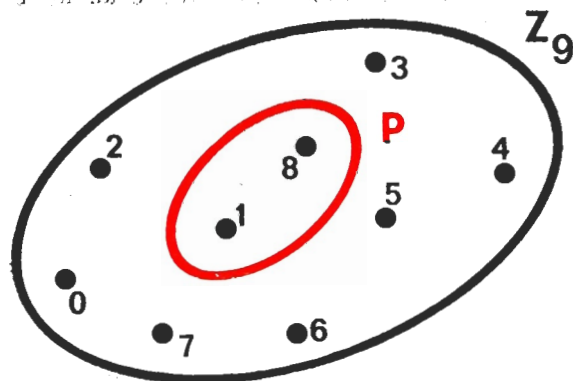


et affirme :  $P, *$  est un groupe.

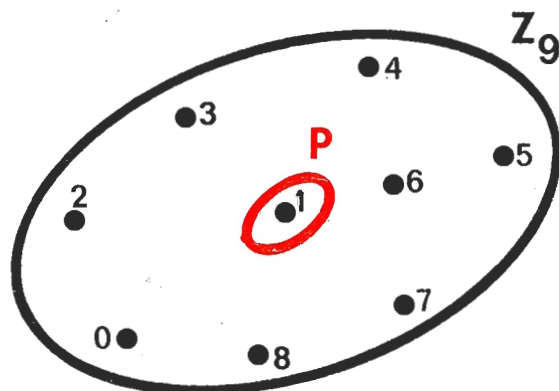
- Facile ! Il suffit d'enlever les 3 coupables !



- Moi, j'ai une autre réponse !



- Moi aussi !



Cette situation pédagogique explorée avec tant d'enthousiasme coloré, contient d'importantes notions algébriques. Grâce à l'utilisation de langages graphiques appropriés, celles-ci ont perdu tout caractère dogmatique, rigide et formel et sont devenues des éléments descriptifs familiers.

D'ailleurs, cette étude est de nature à rassurer l'instituteur qui se préoccupe de fixer la table de multiplication, car la réalisation des 9 graphes en exige évidemment la connaissance.

## 4. Pédagogie des situations

Au cours des inoubliables Rencontres de la Commission internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement de la Mathématique, animées par Caleb GATTEGNO de 1950 à 1960, l'expression-clef "pédagogie des situations", qui lui est due, s'est progressivement imposée à la réflexion des participants.

Pas plus que les oeuvres d'art, les situations pédagogiques ne se laissent définir. Tout comme les oeuvres d'art, leur importance et leur valeur peuvent souvent se mesurer au nombre, à la variété, à la densité et à la portée des questions qu'elles posent.

Une situation créative parle d'elle-même et permet une intervention du maître infiniment plus discrète et plus subtile que dans le passé. Celui-ci devient un intermédiaire et un catalyseur qui ne communique plus directement un savoir. En cette optique, l'une des parties les plus importantes de sa fonction consiste à sélectionner les bonnes situations et à apprendre aux élèves à les interroger.

Tout mon enseignement est inspiré par la pédagogie des situations de GATTEGNO et les leçons décrites au ch. 3 en ont présenté quelques-unes qui, supportées par divers langages graphiques, n'ont cessé de lancer des défis, de susciter des interrogations, de poser des problèmes, de provoquer des réflexions en chaîne et d'entraîner l'esprit à la découverte.

Si j'avais à illustrer par un seul exemple, fortement représentatif, ce que j'entends par une situation féconde, je citerais sans hésiter MINICOMPUTER de PAPY.

Ce n'est pas l'objet du présent texte de décrire ce moyen pédagogique nouveau, ni d'en montrer les immenses ressources (1).

A l'âge où l'enfant acquiert progressivement les structures numériques les plus importantes (de 5 à 8 ans, notamment), MINICOMPUTER le mobilise de découverte en découverte. Il lui révèle la numération de position (binaire et décimale), lui donne accès aux premiers grands nombres, suscite la conquête de la virgule et l'amène à réinventer toutes les stratégies du calcul numérique élémentaire. En bref, au niveau d'une première initiation, il place d'emblée l'enfant sur l'orbite du champ des nombres réels [M1] [EM1].

Sans doute, les psychologues expliqueront-ils les raisons de ce succès. Un premier pas dans cette direction semble avoir été fait par STEINER [NICO]

Pédagogie des situations, ce vocable éveille immédiatement un cortège d'images et d'exemples :

*Papygrammes des fonctions "a comme mère" et "a comme père"* conduisant inévitablement à la composition des relations (1)

*Bataille de nombres rouges et bleus* présentant l'addition des entiers positifs et négatifs par une méthode qui canalise l'agressivité naturelle des enfants à des fins positives (2)

*Les simples quadrillages*, porteurs irrésistibles de la taxidistance et source inépuisable d'exercices accessibles dès 5 ans (3)

*Graduations et sous-graduations binaires* initiant aux nombres réels et aux premiers éléments d'analyse (4)

*Le plan pointé  $\pi_0$* , modèle privilégié du groupe des vecteurs du plan et mine intarissable de fascinants problèmes algébriques et graphiques (5)

*Vectoriels d'achats*, support économiste de la pensée dans son accès à l'algèbre linéaire (6)

- 
- (1) [MM1, Ch 9] [EM2, Ch. 4]  
(2) [M1, ch 13] [EM1, ch 8] [B.N]  
(3) [T] [EM2, ch 18] [EM3, ch 18]  
(4) [F2] [MM2] [NICO 10, pp 151-173] [F5] [EM4, ch 1]  
(5) [G] [MM1, ch 22] [MM6, ch 5] [EM4, ch 12]  
(6) [NICO 13, pp 7 à 29] [H.L.] [EM5, ch 15] [EM6, ch 7 à 9]

Expérimentées depuis plus de 10 ans, dans des contextes variés et à des niveaux d'âge différents, les situations que nous venons d'évoquer ont fait l'objet de nombreuses publications et sont devenues des classiques de la pédagogie de la mathématique.

Nous allons développer deux exemples moins connus et vécus récemment dans une classe de sixième primaire (11 ans).

Le premier d'entre eux, amusante génération de l'ensemble des nombres rationnels, nous a été inspiré par le beau livre de Madeleine GOUTARD [GOUTARD, p. 35].

- Chez un brocanteur, notre ami Jean-Jacques a acheté une machine à écrire plus usée que celle de Nabu. Les seuls signes mathématiques encore utilisables sont



- Vous allez demander les nombres que Jean-Jacques peut écrire avec sa machine !

La situation a provoqué la question ; l'esprit part à la découverte.

- 49; 499; 9494

- Il y en aura à l'infini !

Les enfants donnent en vrac de multiples exemples et, chemin faisant, réalisent l'importance des parenthèses dans l'écriture de termes mettant en jeu des lois non associatives.

$$( (9 - 9) - (9 - 9) ) - (9 - 4) = (0 - 0) - 5 = \bar{5}$$

$$(9 - 9) - ( (9 - 9) - (9 - 4) ) = 0 - (0 - 5) = 5$$

Sur leur lancée, ils montrent que la machine de Jean-Jacques permet d'engendrer l'ensemble des nombres rationnels.

- *Moi, j'ai écrit  $9 : 9$  . C'est 1*
- *Moi, je l'ai aussi,  $(9 - 4) - 4$*
- *$(9 - 9) - (9 : 9)$  et j'ai  $\bar{1}$*
- *Moi, j'avais écrit  $(4 - 9) - (-4)$*
- *Donc on a tous les nombres*
- *Est-ce vrai ?*
- *J'ai voulu dire tous les entiers positifs et négatifs*
- *Entiers positifs et négatifs et signe : , alors on pourra écrire toutes les fractions.*
- *Plus précisément, tous les nombres rationnels que sont les fractions à termes entiers.*

Apparemment clos, le problème ne l'est pas pour les élèves.

- *Et si l'on écrivait un demi avec la machine de Jean-Jacques ?*

L'enfant n'a-t-il pas confiance en le raisonnement qu'il vient d'élaborer ? Nous ne le pensons pas. Lorsqu'il découvre un théorème, le mathématicien professionnel n'a-t-il pas, lui aussi, la curiosité de l'exemplifier ? La manipulation de situations particulières lui assure une meilleure connaissance du fait général, l'aide à formuler de nouvelles questions et dans bien des cas, à dépasser le résultat initial.

De plus, n'est-il pas simplement amusant de faire fonctionner cette singulière machine à écrire ?



- J'ai écrit un demi, le voici, enchaîne Anne

$$(4 : 4) - (-4 : 4) : 4$$

- Je le fais autrement, suggère Sylvie

$$(9 - 4) : (9 - (-4 : 4))$$

- Et si l'on écrivait 0,01 ?

- C'est difficile !

- Relevons le défi !

- Pas avec un revolver !

Les élèves abordent ce problème avec l'agressivité créative du chercheur mobilisé par une situation fascinante.

Ariane

$$(4 : 4) : (99 - (-4 : 4))$$

Sylvie

$$(4:4) : \left( \left( \left( \left( (9-\bar{9}) - (\bar{9}-9) \right) - \left( (\bar{9}-9) - (9-\bar{9}) \right) \right) - \left( (\bar{9}-9) - (9) \right) \right) - (\bar{4}:4) \right)$$

1
 $\underbrace{18 \quad \bar{18}}_{36}$ 
 $\underbrace{\bar{18} \quad 18}_{36}$ 
 $\underbrace{\bar{18} \quad 9}_{27}$ 
 $\bar{1}$

$\underbrace{\quad \quad \quad 72}$ 
 $\underbrace{\quad \quad \quad 27}$

$\underbrace{\quad \quad \quad 99}$

Antoinette

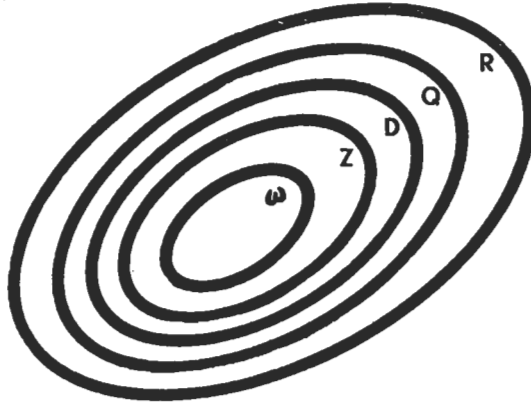
$$(9 : 9) : (99 - (\bar{9} : 9))$$

$$1 : 100$$

Dans leur extrême simplicité ou dans leur amusante complexité, les réponses des enfants témoignent à la fois d'une maîtrise de techniques de calcul déjà fort élaborées et d'une évidente ingéniosité créative.

\*  
\* \* \*

A diverses reprises, il est arrivé qu'un diagramme suggère aux élèves des problèmes intéressants. Ayant placé ces cordes de VENN



pour l'ensemble  $\omega$  des naturels, l'ensemble  $Z$  des entiers, l'ensemble  $D$  des décimaux limités, l'ensemble  $Q$  des rationnels et l'ensemble  $R$  des réels, j'eus la curiosité de demander (11 ans) :

- Quelles questions vous pose ce diagramme ?

Les suggestions fusent de toutes parts.

Question 1

- Peut-on encore dessiner d'autres cordes ?

Je précise :

- Sans doute, veux-tu dire : d'autres cordes définissant de nouveaux ensembles de nombres ?

- Moi, je dis oui !

- Et moi, je dis non !
  - Les pairs !
  - Les impairs !
  - Tous les multiples de 5 positifs ou négatifs !
- etc, etc.

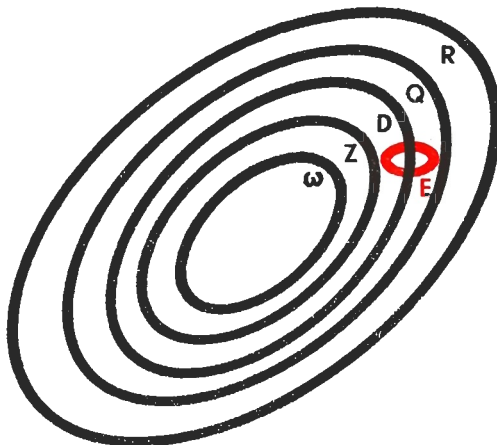
Question 2

- Y-a-t-il une infinité de cordes ?
- Tu te demandes s'il est possible de dessiner une infinité d'ensembles intéressants de nombres.
- La réponse est oui, car on peut dire les multiples de 1, de 2, de 3, et ainsi à l'infini !

Nouvelle demande :

Question 3

- Y-a-t-il moyen de dessiner cette petite corde rouge ?

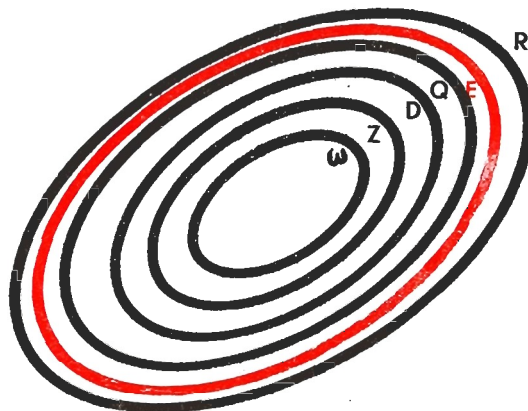


- Tu te demandes comment définir l'ensemble  $E$  ?
- On pourrait mettre des décimaux limités et illimités !
- Sois plus précis.
- $E = \{0,333333 \text{ etc}; 0,6\}$  Antoinette
- Mais il faut en mettre à l'infini !
- Pourquoi ?  $E$  pourrait parfaitement désigner la PAIRE proposée par Antoinette. Fournissez d'autres exemples.
- Tous les nombres décimaux limités et illimités !
- Faux ! Car alors,  $E = \mathbb{R}$
- Moi, je dis :  
 $E = \{0,2 ; 0,4 ; 0,8 ; 0,16 ; \text{etc} ; 0,22222\text{etc} ; 0,44444\text{etc} ; 0,88888\text{etc} ; 0,1616161616\text{etc} ; \text{etc}\}$
- Très bon exemple. Les deux plages de  $E$  sont infinies.
- Madame ! On pourrait dessiner des cordes à cheval sur chacune des cordes !

Nouveaux problèmes :

Question 4

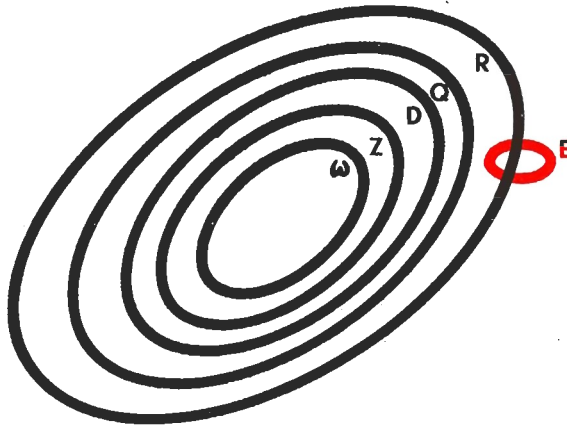
- Peut-on dessiner une corde rouge entre  $Q$  et  $R$  ?



- Comment définir un ensemble  $E$  compatible avec ce diagramme ?
- A l'ensemble  $Q$ , j'ajoute  $0,1234567891011121314etc$
- Et moi, j'ajoute à  $Q$   $0,01001000100001etc$  ;  $0,02002000200002etc$  ;  $0,03003000300003etc$  ; et je fais cela avec tous les nombres !

Question 5

- Peut-on dessiner une corde rouge à cheval sur  $R$  ?



Nicolas hachure  $E$  et affirme :

- $E$  est vide !

Anne hachure  $E \setminus R$  et propose :

- $E = \{0,12345678910111213etc ; 0,11011101111011111etc\}$
- Moi je dis :  $E$  comprend  $0,003040506070809010011etc$  et tous les crayons du globe !

Les questions des enfants surprennent par leur variété, leur inattendu, leur fantaisie, leur bon sens. Elles semblent vouloir rompre avec le cadre de la classification standard des nombres réels et posent des problèmes qui font réfléchir. L'esprit des petits est moins rigide que le nôtre. Ils regardent une situation avec des yeux neufs, sans a priori, et osent poser des questions simples, voire naïves, souvent fécondes.

N'arrive-t-il pas malheureusement trop souvent que l'adulte oppose à cette curiosité naturelle, son indifférence, son manque d'intérêt, son désir d'enseigner et de dominer, sa crainte d'être entraîné dans des voies inconnues ?

## 5. Calcul

Contrairement à ce que semblent croire l'homme de la rue, certains parents et bien des journalistes, un enseignement moderne de la mathématique suscite dans le domaine du calcul, une exubérance créative particulièrement explosive.

Cela ne doit pas nous étonner. Le jeune enfant est profondément intéressé par les nombres, qui peuplent son univers ; et beaucoup d'entre eux lui deviennent spontanément familiers, bien avant l'âge de 6 ans. Apprendre à les mieux connaître et à les dominer est à la fois une démarche naturelle et une aventure passionnante pour le petit élève.

L'enseignement traditionnel présente un assez triste visage numérique : calculs routiniers et fastidieux dans des ensembles arbitrairement restreints de nombres.

La mathématique d'aujourd'hui élargit l'horizon. Dès l'école primaire, on calcule non seulement avec les nombres réels (sans restriction), mais avec des ensembles, des relations, des vecteurs, des angles.

De plus, la rupture du carcan des 4 opérations fondamentales offre la liberté d'inventer de nouvelles lois qui conduisent à des structures toujours amusantes et souvent importantes : groupoïdes, monoïdes, groupes, anneaux, champs, vectoriels.

*Dans une classe de quatrième année primaire (9 ans)*

[EM4, ch 19, § 7]

- Imaginez vous-mêmes une loi interne sur  $Z = \{\dots, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, \dots\}$
- Tout le monde va avoir une idée différente !
- Alors, tant mieux ! Nous aurons de nombreuses lois.

Saine réaction du groupe qui, avec un bel optimisme, ne doute pas de sa créativité.

- Voici  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Comment définir  $a * b$  ?

Les idées fusent. Nous nous limiterons à 3 exemples.

- Le plus petit !

- Autrement dit,  $a * b = \min \{a, b\}$

$7 * 4 = 4$   
 $0 * \overline{6} = \overline{6}$   
 $\overline{5} * \overline{4} = \overline{7}$   
*Justain*  $\overline{999} * \overline{998} = \overline{999}$   
 $6 * 6 = 6$

- Moi, je fais la moitié !

(Cédric)

- Sois plus précis.

- Prendre la moitié de chaque nombre et les additionner !

- C'est-à-dire, calculer la moyenne de  $\{a, b\}$

$6 * 8 = 7$	$7 * 8 = 7,5$
$17 * 19 = 18$	$7 * 7 = 7$
$\overline{12} * \overline{36} = \overline{24}$	$\overline{15} * 16 = 0,5$

- Madame ! La loi de Cédric n'est pas interne !
- Non, parce qu'il y a 0,5 .
- Ce ne sont pas toujours des nombres entiers !
- J'ai une autre idée ! Avec le code des 10 piquets.
- Dans quel ensemble définis-tu cette loi ?
- Dans l'ensemble des naturels. Par exemple, quand on a dix et un nombre derrière, c'est ce nombre !
- Je ne comprends pas. Comment calcules-tu  $15 * 8$  ?
- C'est 3 .
- Par exemple,  $17 * 18 = 5$
- Ou  $49 * 31 = 0$
- On enlève les dizaines et on garde le dernier chiffre.
- De quel nombre enlevez-vous les dizaines ?
- De  $a + b$
- C'est le dernier chiffre de  $a + b$ .

Les enfants demandent à soumettre leur loi à certains tests : commutativité, associativité, existence d'un neutre, d'un absorbant, de diviseurs de zéro, d'éléments inversibles, etc. Ils acquièrent ainsi une connaissance des premières notions d'algèbre, plus intime que celle dispensée par des cours donnés beaucoup trop tard à l'université.

\*  
\* \* \*

A côté de la richesse inépuisable dans le choix des situations, l'enseignant dispose actuellement d'une multitude de moyens permettant de présenter les calculs de manière attrayante. Diagrammes de VENN, papygrammes, arbres, MINICOMPUTER, abaques, graduations, se relaient constamment pour relancer l'intérêt de l'enfant, aiguïser sa curiosité, lui poser de nouvelles

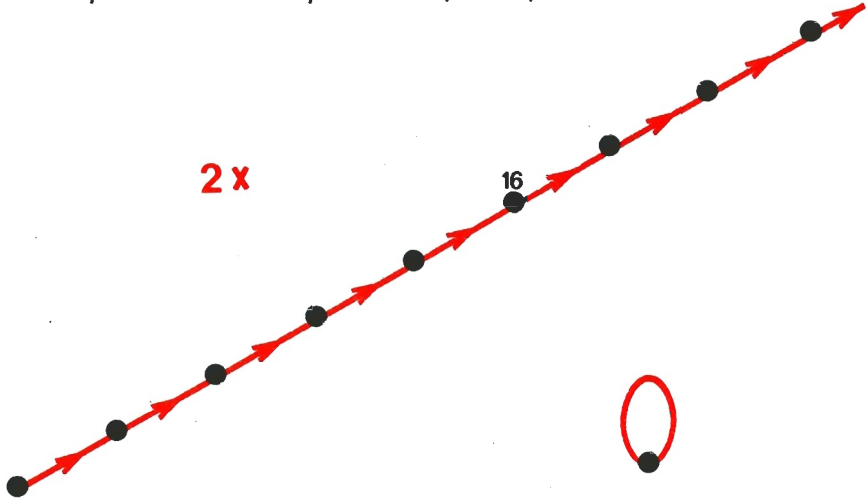


questions, l'amener à comparer, généraliser, abstraire.

Ces langages non verbaux le confrontent très tôt avec des problèmes numériques importants.

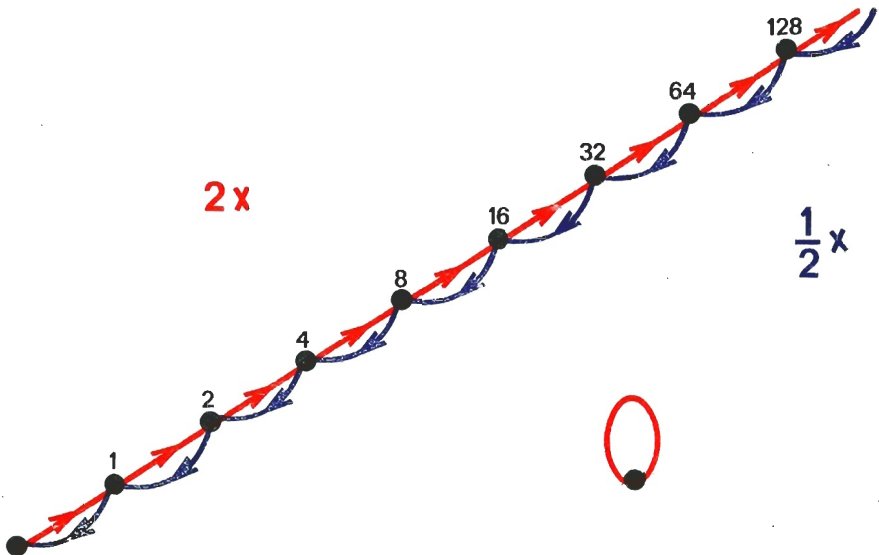
Nous nous bornerons à un exemple.

Fin de première année primaire (7 ans) :



- Quels nombres sont représentés par ces points ?

Familiarisés depuis quelques mois avec le jeu de la fonction  $2x$  et de sa réciproque  $\frac{1}{2}x$ , les élèves calculent sans peine les nombres voisins de 16.



La boucle les laisse perplexes.

- *J'ai trouvé une faute*, affirme Hervé en la montrant.  
Approbation unanime de la classe.

- Je ne suis pas aussi affirmative que vous.

Silence étonné. Avec un fin sourire, Ariane murmure :

- *Et si c'était zéro ?*

- *Ah oui ! Deux fois zéro égale zéro.*

- *C'est zéro.*

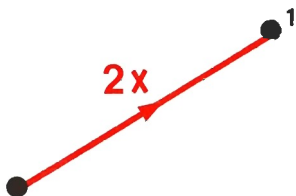


Reste à découvrir l'origine de la ribambelle rouge, c'est-à-dire le demi de 1

- *Je crois que c'est 1*

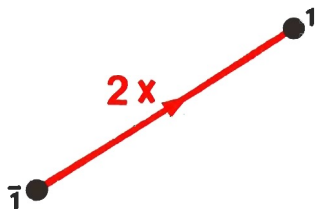
Intéressante erreur !

Les enfants connaissent bien la fonction  $\frac{1}{2}x$ , mais n'ont jamais rencontré le nombre  $\frac{1}{2}$ . Troublés par cette mystérieuse flèche



ils substituent peut-être à la fonction  $\frac{1}{2}x$  réciproque de  $2x$ , la fonction  $-2$  réciproque de  $+2$  et sont conduits au calcul  $1 - 2 = \bar{1}$ .

Autre hypothèse : ne trouvant aucune solution plausible dans l'ensemble des naturels, mais connaissant depuis plusieurs mois celui des entiers négatifs, ils y puisent le nombre qui leur semble avoir le plus de chances d'être correct, et le soumettent au test du graphe.



- C'est faux !
- Pourquoi ?
- $2 \times 1 = 2$
- On pourrait essayer  $2$
- Faux aussi, car  $2 \times 2 = 4$

Les enfants abandonnent la partie. Je n'insiste pas.

La leçon se termine sur un échec *apparent* ou mieux ... sur un problème en suspens qui a bien des chances de rester présent à l'esprit des élèves après la fin du cours, ainsi que l'a judicieusement remarqué Anna Sofia KRYGOWSKA.

Quelques jours plus tard, à l'occasion d'une première initiation au calcul de la moitié d'un nombre à l'aide de MINI-COMPUTER, les enfants ont franchi le mur du son. Après qu'ils aient découvert la stratégie de ce nouveau calcul, je leur ai demandé de proposer un nombre dont ils aimeraient connaître la moitié. Première suggestion : 11

- $\frac{1}{2} \times 11$  ?
- C'est cinq et demi, lance un élève.
- Comment l'écrire ?
- Je ne sais pas.

Le premier nombre rationnel *non entier* a fait son apparition, sans qu'il n'y ait eu intervention de ma part. Restait à en découvrir l'écriture.

Cette nouvelle conquête fut faite à l'aide de MINICOMPUTER qui conduisit tout naturellement les enfants à réinventer la virgule

Dans sa très belle conférence d'Arlon en 1968 [NICO 2, pp. 2-16], Jean DIEUDONNE a attiré l'attention sur le fait que le "vrai" calcul n'est pas le CALCUL ALGEBRIQUE mais le CALCUL APPROCHE. Il en a rappelé le rôle fondamental en analyse et dans nombre d'applications de la mathématique.

Inspirée par cette remarque, j'ai présenté, dès 6 ans, des exemples d'ordres, animés par les graphes joyeux. Et puis, progressivement, grâce au support de MINICOMPUTER et d'une droite graduée, par une longue et enrichissante démarche axiomatisante, j'ai conduit les enfants au fait fondamental que constitue l'axiome de continuité. Dès la fin de la cinquième année (10 ans), la structure de champ ordonné des nombres réels était mise en place et prête à fonctionner.

Le jeune élève s'intéresse au calcul approché et il aime manipuler des inégalités. L'un des résultats les plus inattendus de mon expérience n'est-il pas d'avoir mis ce fait en évidence ?

Un décimal (ou un binaire) illimité est en soi une situation qui parle à l'enfant et qui l'intrigue. Ainsi, lançant le nombre illimité non périodique

$$a = 0,12345678910111213141516\text{etc}$$

Antoinette (10 ans) me demande avec une curiosité impatiente :

- *Mais comment allons-nous calculer  $7a$  ?*

Elle ajoute :

- *7 fois l'infini, ce n'est pas facile !*

La structure de groupe additif ordonné  $\mathbb{R}$ ,  $+$ ,  $\leq$  ayant été mise en place, les élèves étaient en mesure de relever le défi.

- Le calcul d'Antoinette met en jeu un décimal illimité. Comment le traduire en une suite de calculs dont les acteurs soient des décimaux limités ?

...

- Nous savons que  $a = 0,123456\text{etc.}$  Comment transcrire cette information à l'aide d'inégalités ?

-  $0,123456 \leq a \leq 0,123457$

- Quelles inégalités intéressantes en déduire ?

-  $7 \times 0,123456 \leq 7a \leq 7 \times 0,123457$

-  $0,864192 \leq 7a \leq 0,864199$

- Madame ! Les 5 premiers chiffres de  $7a$ , ce sera toujours 86419.

- Et le sixième, entre 2 et 9

- Donc  $7a = 0,86419\text{etc.}$

- Peut-on préciser davantage cette réponse ?

- On va en mettre 15 après la virgule, suggère Didier.

Ariane écrit au tableau :

$$0,123456789101112 \leq a \leq 0,123456789101113$$

- Il faut multiplier ces nombres par 7 .

-  $0,864197523707784 \leq 7a \leq 0,864197523707791$

- On connaît les 13 premiers chiffres !

- Le quatorzième est 8 ou 9.

- Ecrivons  $7a = 0,864197523707784$

- On peut continuer avec 30 chiffres !

- Ou avec 100, 1 000, 1 000 000.
- Tant qu'on veut, mais on n'aura pas la fin !
- Je croyais que ce serait difficile, mais ce ne l'est pas !

Une fois de plus, l'insatiable curiosité des enfants les a lancés sur une piste féconde. Il a suffi de leur montrer comment faire fonctionner la machine-outil adéquate (en l'occurrence, le groupe additif ordonné  $R, +, \leq$ ) pour qu'ils découvrent eux-mêmes la stratégie de ce nouveau calcul.

## 6. Expression picturale

L'expression picturale très libre, qui joue un rôle important dans notre méthode, permet à l'enfant d'affirmer sa personnalité au coeur de l'activité mathématique.

Dès les toutes premières leçons (5 à 6 ans), laissé seul en présence d'une feuille de papier blanc *non ligné* et de marqueurs assez gras, le jeune élève est aux prises avec le problème primordial de la mise en page.

Sans donner de directives plus précises, je demande, par exemple, de dessiner 7 beaux gros points. La toute première production de la classe est généralement fort révélatrice. D'emblée, certains enfants occupent harmonieusement l'espace de la feuille de papier et livrent un dessin équilibré, net et audacieux.

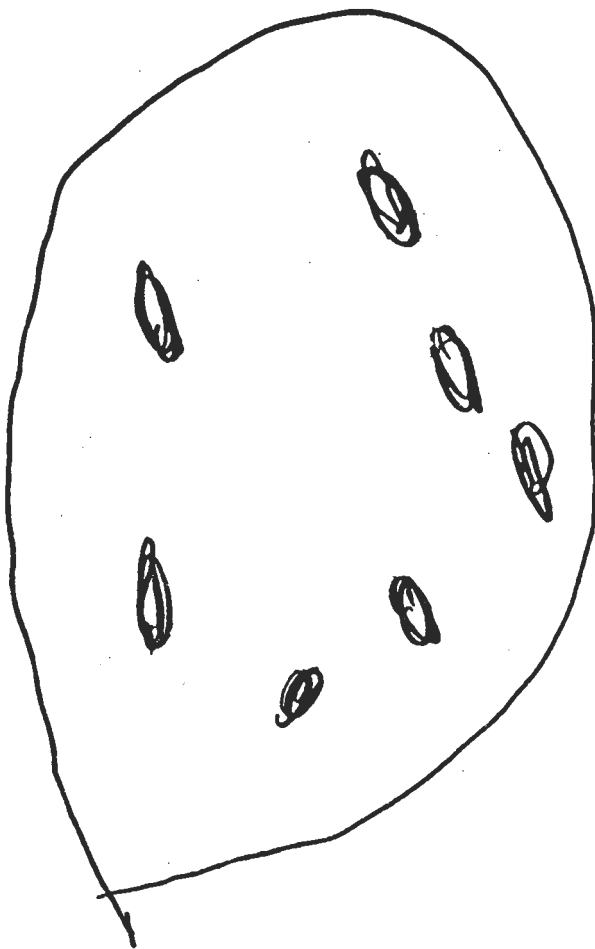


Echelle : 0,3

Patrice a dessiné 8 points. Mais quelle belle mise en page !

D'autres présentent une solution étriquée, où de petits points maladroitement tracés semblent craintivement rassemblés dans un coin. Enfin, certains élèves ont des difficultés à dessiner de beaux points et y substituent des gribouillis.

anita



Echelle : 0,75

Si malhabiles soient-elles, ces premières réalisations sont accueillies avec une égale sympathie. Je me garde d'intervenir trop tôt et me borne à quelques encouragements d'ordre technique. Lorsque je dessine au tableau, je veille à tracer de beaux gros points et à les répartir au milieu de l'espace dont je dispose.

Le premier graphe s'est révélé lui aussi fort significatif et m'est apparu *a posteriori* un excellent test d'aptitude. En feuilletant l'album des toutes premières réalisations et les comparant à l'ensemble des travaux produits des six années d'étude, je crois pouvoir affirmer que certains traits de caractère et certaines composantes de la personnalité mathématique sont clairement inscrits dans ce premier graphe.

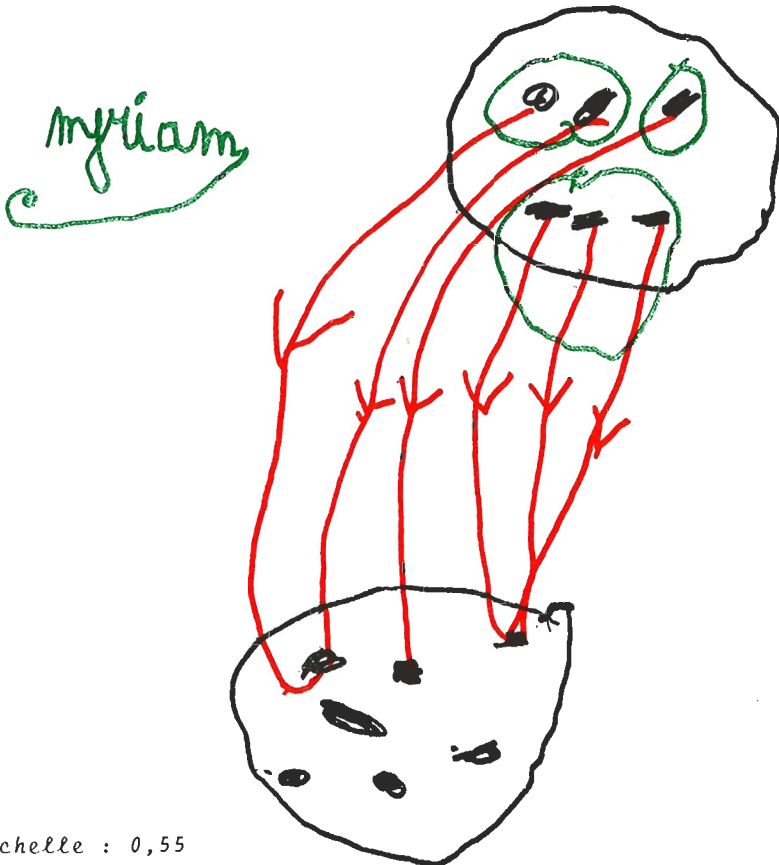
Un nouveau champ d'investigation s'ouvre aux psychologues intéressés par le dessin d'enfant.

\* \* \*

L'élève a l'occasion de s'initier à des techniques graphiques extrêmement diversifiées et qui lui seront utiles, même en dehors de toute préoccupation mathématique.

Liberté d'interprétation et initiative sont inlassablement encouragées. Très rapidement, chaque enfant affirme son propre style.

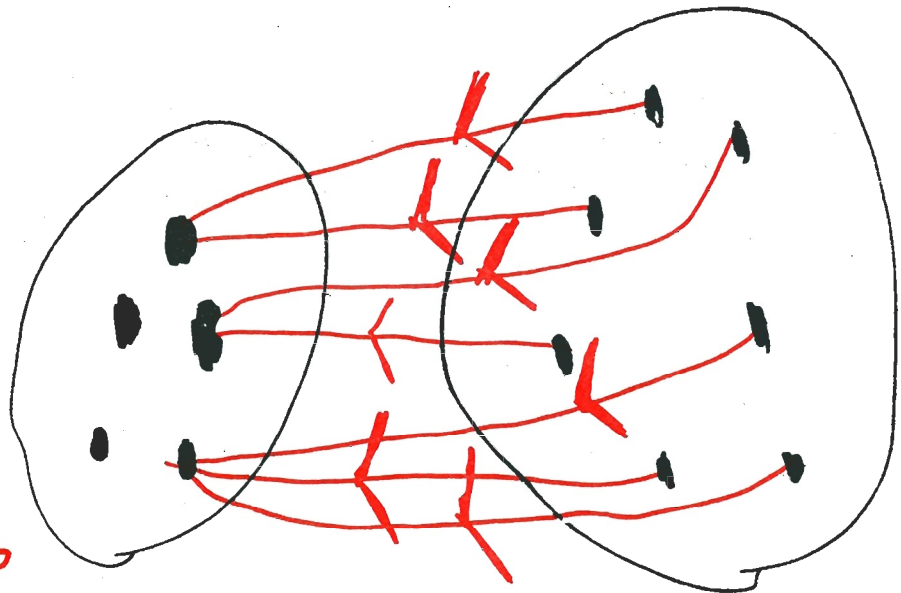
Exécutés à quelques jours d'intervalle par des enfants de la même classe de première année (6 ans), ces trois dessins reflètent trois personnalités :



Echelle : 0,55

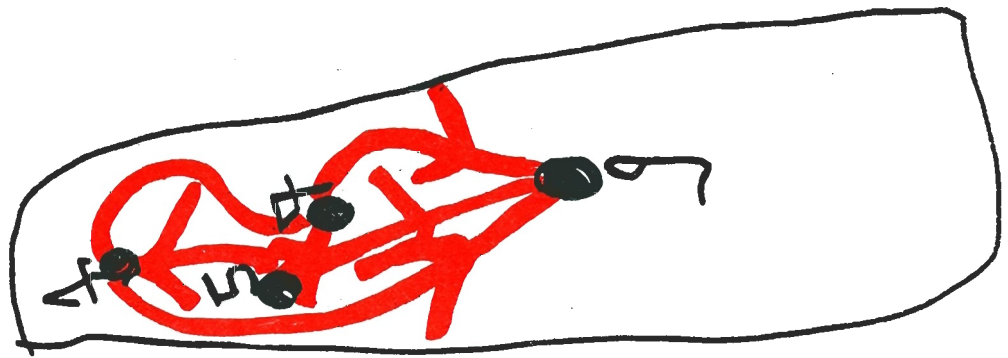


ovule



Echelle : 0,50

didier



Echelle : 0,55

Hirondelles prêtes à l'envol, les flèches du graphe de Sylvie dessiné tout en finesse, inclinent à penser

Mathématique moderne = Mathématique esthétique

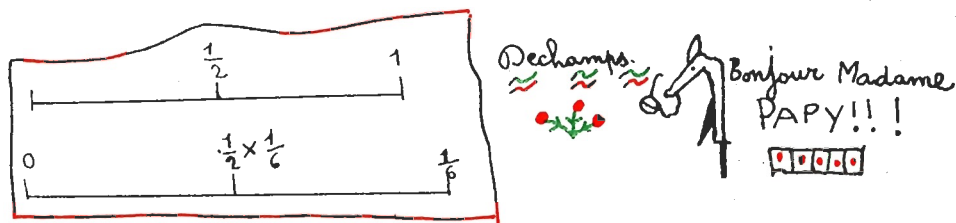
Le dessin de Myriam qui décrit une distribution de bonbons, témoigne de certaines difficultés motrices. En dépit de cet handicap, ce papygramme est remarquable d'intelligibilité et d'originalité. Traçant en vert la partition définie dans l'ensemble de départ par la fonction rouge, Myriam ne se conforme pas au prototype usuel et dessine l'une des cordes vertes partiellement à l'extérieur de la noire. Elle est passée d'elle-même des schémas d'EULER au langage de VENN.

Didier affirme sa vigoureuse et exubérante personnalité dans ce graphe de la relation  $<$ . La corde entourant les 4 points a une curieuse forme oblongue, très différente du tracé en ellipse généralement adopté. Il trace correctement les flèches mais une certaine maladresse technique provoque un malheur : il écrit mal le 1 qui devient 7. Et Didier hérite d'un dessin où le nombre 7 figure deux fois. Il raffine la convention : les deux points représentatifs de 7 sont reliés par une ligne sans flèche.

\* \* \*

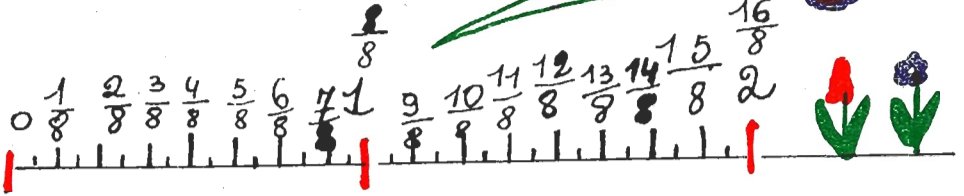
La création de l'oeuvre en couleur est un évènement important, même dans les cas extrêmes où l'élève assimile fort peu la technique mathématique proprement dite. Son exécution favorise la concentration et aide l'enfant à rester attentif aux éléments essentiels de la situation mathématique sous-jacente.

De plus, ces schémas si joliment tracés, créent un climat affectif positif qui se traduit fréquemment par des messages indirectement adressés à l'enseignant.



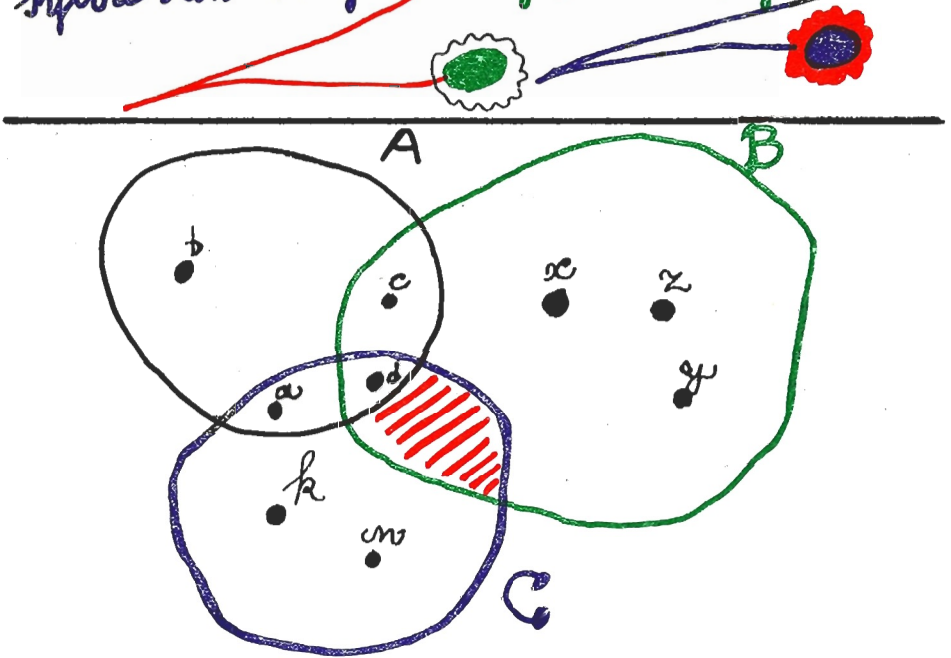
Souvent aussi, la joie éclate tout simplement dans la signature (1)

Sylvie van Duynen.



Sylvie van Duynen

Sylvie van Duynen



(1) Sylvie van Duynen ≠ Sylvie, auteur du dessin p. 115.

Qu'arrive-t-il lorsque l'enfant a de grandes difficultés motrices et témoigne vraiment de très peu d'aptitudes graphiques ? La comparaison de son oeuvre malhabile avec celle de ses compagnons ne risque-t-elle pas de le décourager et de l'éloigner de la mathématique ?

Cette difficulté peut être tournée en s'aidant des apports de différents canaux sensori-moteurs. L'une de nos techniques consiste à projeter des images lumineuses, aussi grandes que possible, de certains graphes de couleur et, pour en tester la compréhension, d'engager les élèves à répondre aux questions en mimant des flèches.

Ainsi raisonnent-ils avant de dessiner. Cette méthode qui rejoint la gestuelle préconisée pour l'enseignement de la lecture et de l'écriture [BOREL], [de FACI] aide tous les enfants, mais est particulièrement recommandée pour les moins doués du point de vue graphique.

Entraînés à penser, concevoir, évaluer et mimer avant d'exécuter, ils réalisent en général assez rapidement des progrès spectaculaires.

## 7. Affectivité

C'est assez peu au travers de livres et en particulier d'ouvrages théoriques de psychologie, que j'ai acquis une connaissance intuitive du monde des enfants. J'ai l'impression de les avoir approchés davantage en observant leurs jeux spontanés, en revivant mes propres souvenirs d'enfance, en suscitant l'expression de leurs émotions au travers de jeux dramatiques ou à l'aide d'un théâtre de marionnettes.

A diverses reprises, j'ai pris en charge plusieurs activités très différentes d'un même groupe d'enfants : longues promenades en forêt, cours de mathématique, ateliers de peinture, dramatisation, marionnettes, musique.

Combien de fois n'est-il pas arrivé que, désorientée par l'attitude négative d'un élève au cours de mathématique, j'en percevais subitement la cause au travers de ce qu'il exprimait dans l'une de ces activités d'extériorisation.

Ainsi, ai-je pris conscience peu à peu du rôle de l'affectivité dans l'apprentissage de la mathématique.

Après 25 années d'enseignement à des élèves de 4 à 20 ans et l'étude systématique de multiples cas présentant un blocage sérieux en mathématique, j'en suis arrivée à la conclusion que, dans la majorité des cas, la cause doit être recherchée dans un trouble important de la relation enfant-parents.

Le professeur de mathématique n'est pas un psychothérapeute et n'a pas les moyens de dénouer des crises aussi complexes. De plus, lui aussi a ses problèmes et est loin d'être totalement disponible.

Alors, comment peut-il agir ?

Plus il a de contacts avec ses élèves en dehors du cours de mathématique, plus il a des chances de trouver des solutions.

Jamais je n'oublierai le visage de cette enfant de 12 ans dont le père avait été décapité au cours de la dernière guerre, lorsqu'elle avait 4 ans.

Nulle joie de vivre, nul sourire, nulle manifestation de curiosité intellectuelle dans les yeux de cette petite. L'invitant à se joindre à l'un de nos groupes d'expression libre, je me suis heurtée à un refus catégorique. Je l'ai engagée à y assister, ne fut-ce qu'en observatrice, et à participer à nos jeux seulement lorsqu'elle le désirerait. Elle a accepté.

Quelques semaines plus tard, à l'occasion de l'animation d'un conte, nous avions besoin d'un figurant dont le rôle rudimentaire consistait à faire avancer une vache (imaginaire) en tapant sur sa queue. L'enfant s'est offerte spontanément pour mimer ce personnage. Pour la première fois, son visage s'est éclairé. On y lisait la joie libératrice de sortir enfin de sa forteresse intérieure et d'entrer en relation avec les autres.

Dès ce moment, et parallèlement aux activités d'expression auxquelles elle n'a cessé de participer, son attitude au cours de mathématique s'est profondément modifiée et ses progrès ont été rapidement spectaculaires.

Mais que faire dans le cadre plus limité du cours de mathématique ? Connait-on des facteurs perturbateurs plus spécifiquement liés à cette discipline ?

Comment peut-on éventuellement y remédier ?

Il semble bien que la mathématique engendre l'angoisse plus que tout autre cours. Sans doute est-ce dû à la nature même de cette science qui conduit souvent à une épreuve de vérité. On comprend ou on ne comprend pas, on découvre ou on ne découvre pas, la solution proposée est correcte ou non. En mathématique, il est moins facile de se leurrer sur l'état de ses connaissances et de ses possibilités créatives que dans d'autres domaines. On constate même que la plupart des individus ont une tendance irrésistible à sous-estimer leur propre talent.

Comment aider l'enfant à vaincre cette angoisse qui me semble le principal facteur d'inhibition et d'incompréhension ?

Ma réponse est multiple.

1. *Peu parler et bien écouter.*

Suivre attentivement le cheminement de la pensée de l'élève; accueillir ses démarches hésitantes, même si elles sont maladroites; éviter d'interférer prématurément dans sa recherche; lui laisser le temps et la joie de la découverte.

2. *Faire comprendre que l'erreur est un élément naturel et positif dans l'apprentissage de la mathématique.*

Ne devrait-on pas afficher à la porte de toute classe cette pensée de Caleb GATTEGNO : "C'est un privilège de l'homme de faire des fautes. C'est uniquement par l'expérience, expérience qui est souvent pénible, que l'on apprend et que l'on acquiert quelque degré de sagesse" [GATTEGNO, p. 57]

Avoir le cran de penser tout haut, oser se tromper sans crainte d'être ridiculisé ou pénalisé, sont des attitudes qu'il est essentiel de développer chez l'enfant et chez l'adulte.

L'enseignant doit accepter de révéler les limites de son savoir. La science évolue à un rythme qui permet difficilement de tenir nos connaissances à jour. Ce fait si caractéristique

de notre époque ne doit pas être dissimulé aux enfants, même très jeunes.

Dans le cadre d'une pédagogie dynamique, l'élève pose souvent des questions ouvertes sur un domaine encore peu familier à son maître. Si celui-ci est sans défenses et accueille ces défis avec intérêt, il crée dans la classe un climat positif de recherche et d'échange.

J'ai le souvenir particulièrement vivace d'une leçon faite à des enfants de 9 à 10 ans, qui m'avait mise en sérieuse difficulté. J'avais demandé de rechercher des exemples d'ordres totaux non naturels dans l'ensemble des points d'une droite réelle. Rapidement submergée par une multitude de suggestions, j'avais à trier très rapidement le vrai du faux. Après discussion avec la classe, nous avons retenu trois exemples. Quelques jours plus tard, je me suis rendu compte que l'un d'entre eux était faux.

J'ai proposé de discuter à nouveau ce problème. Les enfants ont aisément découvert "notre" erreur. J'ai remarqué : "Nous nous étions trompé tous ensemble. Nous sommes collectivement responsables de cette faute". Avec un fin sourire, Didier a commenté : "D'accord, mais vous un peu plus que nous". Remarque que j'ai acceptée de bon coeur.

N'est-il pas rassurant pour l'apprenti de constater que son maître peut se tromper, lui aussi ? De plus, le partage équitable des responsabilités me semble un facteur favorable au développement harmonieux d'un enseignement collectif.

### 3. Ne pas juger, s'abstenir de comparer les enfants.

Encourager les réalisations individuelles et les progrès, même s'ils se situent à des niveaux très différents. Ne pas noter les travaux des élèves, ni à l'aide d'un nombre, ni à l'aide de remarques écrites (qui se substituent si insidieusement à la notation chiffrée).

Amener chaque enfant à apprécier lui-même son travail avec indulgence et réalisme, en lui montrant tous les aspects positifs, même si le résultat déçoit parfois ses espérances.

4. *Tuer dans l'oeuf l'esprit de rivalité mais susciter un climat d'émulation, d'autodépassement et d'entraide.*

Les jeunes élèves sont généralement très lucides. Souvent exigeants pour eux-mêmes, ils jugent leurs camarades avec une rigueur implacable qui frise parfois la cruauté.

Il est utile de leur apprendre à nuancer leur point de vue. Sans vouloir masquer les difficultés de tel ou tel enfant, il est bon d'amener le groupe à les considérer avec plus de compréhension. Il est important de rendre les enfants conscients du fait qu'une attitude trop critique de leur part risque d'augmenter l'handicap de leur condisciple.

Dans cette approche psychologique, la diversité des aptitudes qui interviennent dans l'apprentissage de la mathématique moderne est un facteur positif. Si aujourd'hui tel élève a l'occasion de réussir un exercice numérique particulièrement difficile, peut-être demain sera-t-il en difficulté dans un problème de géométrie plus aisément résolu par l'un de ses camarades.

Sensible au jeu subtil des relations humaines, l'enseignant peut amener progressivement les enfants à s'apprécier mutuellement avec plus de nuances. Lorsque ce résultat est atteint, les élèves découvrent la vanité des rivalités scolaires et, bien souvent, se développe spontanément au sein du groupe un esprit d'entraide extrêmement bénéfique.

5. *Continuer à apprendre soi-même de la mathématique la plus diversifiée possible.*

Il est bon de faire chaque année l'effort d'étudier un thème nouveau afin d'enrichir ses connaissances, de garder un esprit alerte et flexible et d'être en mesure de faire un cours qui soit en contact avec l'évolution présente de la pensée mathématique.

Cet effort d'initiation personnelle est le seul moyen de rester confronté de manière vivace et sensible avec la douloureuse difficulté de tout apprentissage. Vivant simultanément le double rôle d'enseigné et d'enseignant, le professeur accroît ses chances de devenir pour ses élèves un véritable guide et un inspirateur.



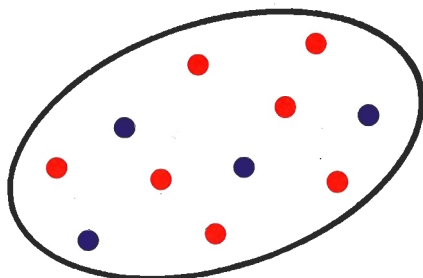
6. Ne pas sous-estimer l'importance d'une certaine forme d'humour et de gaieté dans la relation enfant-adulte.

Etre sensible au côté comique si fréquent dans les remarques spontanées des élèves. Laisser s'épanouir la délicieuse fraîcheur de leur discours.

Un climat affectif positif étant créé dans une classe, il arrive que s'introduisent des facteurs imprévisibles renforçant la relation maître-élèves. Dans mon expérience des 6 dernières années, telle a été l'apparition inattendue d'un personnage mythique important, notre ami Nabuchodonosor.

Nabu est né au cours d'une leçon faite en première année (6 ans). J'y introduisais les entiers négatifs à la manière de PAPY, à partir du combat de deux armées antagonistes.

- Hier soir, j'ai joué au domino avec l'un de mes amis. Celui-ci marquait chacune de ses victoires par un point rouge et chacune des miennes par un point bleu. Après un certain nombre de parties, nous avons dessiné ce diagramme :



- Mais comment se nomme votre ami, ont questionné les enfants.

Prise de court, j'ai lancé : Nabuchodonosor.

Immédiatement adopté par la classe, ce personnage nous a accompagnés au cours de 6 années, connaissant auprès des enfants des fortunes diverses.

Qu'elles semblaient souvent attrayantes les situations présentées par notre ami ! A d'autres moments au contraire,

les élèves le rejetaient, préférant que je les choisisse, eux, comme acteurs de nos histoires mathématiques. Puis est venu le moment où ils m'ont lancé, goguenards : *Nabu, c'est vous !*

Cette prise de conscience n'a pas tué la relation que nous avons avec notre ami. Pour moi, il était un double, plus proche de la pensée enfantine. Il m'inspirait des situations au niveau des élèves, me soufflait des énigmes, nous lançait des défis, critiquait dans leur langage certaines réponses d'enfants, refusait parfois leur argumentation. Eux vivaient et pensaient au niveau de Nabu, qui avait leur âge et évoluait avec eux. Ils comprenaient son langage et ses points de vue et acceptaient volontiers ses objections. Souvent s'établissait entre lui et la classe un dialogue constructif.

Un peu partout dans le monde, de nombreux enseignants ont suivi notre voie. Presque toujours, ils m'ont confirmé que les réactions de leurs élèves aux situations proposées, étaient sensiblement les mêmes que celles que j'avais observées. Mais avec raison, aucun d'entre eux n'a adopté Nabuchodonosor. Ils ont créé un nouveau personnage (le plus souvent un enfant, une marionnette, un élément du folklore national), sorti lui aussi spontanément de la vie de la classe.

\*  
\* \*  
\*

Au travers de cet article, nous espérons que le lecteur aura perçu le caractère humain de la mathématique d'aujourd'hui. Présente dans tous les domaines où s'exerce une activité rationnelle, les racines de cette science sont de plus en plus liées à toute forme de pensée.

Cette évolution est favorable au développement d'une pédagogie créative. L'enseignant voit croître le champ des applications de la mathématique; il en perçoit mieux les implications psychologiques; il découvre de nouveaux moyens qui permettent de la communiquer à un nombre toujours plus grand d'enfants.

Il n'est donc pas étonnant que l'échange entre maître et élèves s'approfondisse sensiblement sur le plan humain et qu'ils en arrivent à une meilleure connaissance et à une meilleure acceptation les uns des autres.

## Bibliographie

- [ B.N.] FREDERIQUE et PAPY  
*Batailles de Nombres*  
Collection PAPY  
Paris, Hachette, (1974)
- [ Borel] BOREL-MAISONNY  
*Langage oral et écrit, 1er vol.*  
Pédagogie des notions de base,  
Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, (1966)
- [ Collard] COLLARD Odette  
*Un Conte où l'on compte*  
Revue des Ecoles  
Tournai, Casterman, (1972)
- [ Coll.PAPY] FREDERIQUE et PAPY  
*Jeux de graphes,*  
Paris, Hachette, (1971)
- FREDERIQUE  
*Jeux de Nombres,*  
Paris, Hachette (1971)
- FREDERIQUE et PAPY  
*Le Jeu des Chapeaux ou les surprises de l'Infini,*  
Paris, Hachette, (1971)
- FREDERIQUE et O. COLLARD  
*Au Cirque*  
Paris, Hachette, (1972)
- FREDERIQUE  
*Premiers Jeux de Nombres*  
Paris, Hachette, (1974)
- [ Cu] G. CUISENAIRE  
*Les nombres en couleur, matériel CUISENAIRE*  
Bruxelles, Maison Calozet
- [ EG] FREDERIQUE et PAPY  
*L'Enfant et les Graphes*  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, (1968)
- [ EL] FREDERIQUE et PAPY  
*L'Enfant de 4 ans et le langage des graphes*  
Paris, Hachette, (1973)
- [ EM] FREDERIQUE  
*Les Enfants et la Mathématique 1 [EM1]*  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, (1970)
- Les Enfants et la Mathématique 2 [EM2]*  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, (1971)
- Les Enfants et la Mathématique 3 [EM3]*  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, (1972)
- Les Enfants et la Mathématique 4 [EM4]*  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, sous presse

*Les Enfants et la Mathématique 5* [EM5]  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, sous presse.  
*Les Enfants et la Mathématique 6* [EM6]  
Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, sous presse.

- [ F] PAPHY  
*Initiation aux Espaces vectoriels* [F2]  
Bruxelles, Presses Universitaires  
Paris, Gauthier-Villars, (1967)
- PAPHY  
*Le premier Enseignement de l'Analyse mathématique* [F3]  
Bruxelles, Presses Universitaires, (1968)
- PAPHY  
*Nombres et vectoriel plan réels* [F5]  
Bruxelles, Presses Universitaires, (1971)
- [ de Faci] S. de FACI  
*Bien lire et automatiquement lire*  
Paris, Les Editions sociales françaises, (1967)
- [ G] PAPHY  
*Groupes* [G]  
Bruxelles, Presses Universitaires  
Paris, Dunod, (1961)
- PAPHY  
*Groupoïdes* [g]  
Bruxelles, Labor  
Paris, PUF, (1965)
- [ Gattegno] C. GATTEGNO  
*For the Teaching of Mathematics*, vol. 1, Reading  
Educational Explorers limited, (1963)
- [ Goutard] M. GOUTARD  
*Les Mathématiques et les Enfants*  
Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, (1963)
- [ H.L.] PAPHY  
*Hommage à Th-H. Lepage - Vectoriels ... à tout âge*  
Bulletin de la Société Mathématique de Belgique,  
t.XXIII, fasc. 4, 1971
- [ JG] FREDERIQUE  
*Jeux de Groupes* (Collection PAPHY)  
Paris, Hachette, (1971)
- [ L] G. LEMAITRE  
*Comment calculer ?*  
Bulletin de l'Académie royale de Belgique -  
Classe des Sciences, Bruxelles, (1954)
- Pourquoi de nouveaux chiffres ?*  
Revue des questions scientifiques, juillet 1955.

*Le Calcul Élémentaire*  
Bulletin de l'Académie royale de Belgique -  
Classe des Sciences, Bruxelles, (1956)

*Calculons sans fatigue*  
Louvain, E. Nauwelaerts, (1954)

[ Mi] PAPH  
*Minicomputer* (Livre et Matériel)  
Bruxelles, IVAC, (1968)

[ MM] PAPH  
*Mathématique moderne 1* [ MM1]  
Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, (1963)  
*Mathématique moderne 2* [ MM2]  
Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, (1965)  
*Mathématique moderne 3* [ MM3]  
Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, (1967)  
*Mathématique moderne 5* [ MM5]  
Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, (1965)  
*Mathématique moderne 6* [ MM6]  
Bruxelles, Labor  
Bruxelles-Paris-Montréal, Didier, (1966)

[ T] FREDERIQUE et PAPH  
*Taximatrix* (Collection PAPH)  
Paris, Hachette, (1973)

\*  
\* \*

#### ARTICLES PARUS DANS NICO

J. DIEUDONNE *Le point de vue du mathématicien concernant la place du calcul dans la mathématique d'aujourd'hui*  
NICO 2, (1969), pp. 2-16

O. COLLARD *Premier Conte mathématique*  
NICO 7, (1970), pp. 29-52

A. VAN HALTEREN-DIEUDONNE  
*A propos de l'utilisation du langage mathématique des papygrammes*  
NICO 10, (1971), pp. 129-146

FREDERIQUE *Nombres réels*  
NICO 10, (1971), pp. 151-173

T. DUTRA *Minicomputer à 5 ans*  
NICO 12, (1972), pp. 64-73

FREDERIQUE et PAPH  
*Initiation vectorielle à l'équation de la droite à 10 ans*  
NICO 13, (1973), pp.7-29

H.G. STEINER *Analyse mathématique du concept du groupement de Piaget. Le minicomputer de PAPH comme groupement.*  
NICO 15, (1973), pp.77-94

\*