



minicomputer

un ordinateur sans électronique

En Belgique, Papy se préoccupe depuis quelque dix ans du renouvellement de l'enseignement des mathématiques. En s'inspirant de l'édifice logique qu'ont bâti les mathématiciens professionnels, les chercheurs, il a édifié à l'intention des adolescents ce qu'il appelle une « maison de la mathématique » dont l'un des piliers principaux est la reconstruction du champ ordonné des nombres réels, d'une manière accessible à des enfants de 13 ans et plus. Poursuivant, comme elle le dit elle-même, ce travail « d'architecte », Frédérique

Papy, sa femme, s'inspirant à son tour de ce qui avait été fait pour les adolescents, s'est mis en tête de bâtir une « maison de la mathématique », destinée cette fois aux élèves de l'école élémentaire mais fondée, tout comme l'autre, sur le champ des nombres réels.

« Bien entendu, déclare *Frédérique Papy*, il n'est pas question de copier la maison des adolescents, pas plus que celle-ci n'a copié la maison des mathématiques pour adultes. La reconstruction du champ des nombres réels se fera par une approche différente de ce qu'elle était dans l'enseignement secondaire, tout en s'inspirant du même cadre général. »

Pour cette reconstruction, Papy a mis au point un matériel original qu'il appelle Minicomputer. Au Congrès de l'enseignement des mathématiques à Lyon, Frédérique Papy a donné une démonstration de ce matériel simple et ingénieux, auquel Maurice Glaymann, dans notre dernier numéro, adressait cependant quelques reproches (1).

(1) *Media 8, page 37.*

En reproduisant ici l'essentiel de l'intervention de Mme Papy, nous laisserons aux maîtres et aux professeurs de mathématiques le soin de conclure.

Je vais essayer de montrer, d'une manière détaillée et que je voudrais assez fine sur le plan pédagogique, qu'il est possible avec des enfants de 6 ans qui n'ont encore aucun bagage scolaire proprement dit (qui sortent de l'école maternelle ou viennent directement du milieu familial) de les conduire à la représentation binaire décimale des entiers naturels, positifs et négatifs et même de certains nombres décimaux, en assurant ainsi un premier apprentissage de la mathématique.

Dans les expériences actuelles, que l'on mène un peu partout au niveau de l'enseignement élémentaire, il semble que l'aspect numérique ait été rejeté à l'arrière-plan, en réaction d'ailleurs contre la place trop importante qu'il occupait dans la pédagogie traditionnelle.

Je crois que nous ne devons pas perdre de vue l'importance du numérique dont l'apprentissage répond à un besoin profond des enfants de 6 ans. Ceux-ci se volent grandir au fur et à mesure qu'ils maîtrisent des calculs portant sur des nombres de plus en plus grands. Je n'introduis pas immédiatement le *Minicomputer* dans la première année d'enseignement. Pendant un mois — ou davantage selon les capacités des enfants — nous nous consacrons à des activités variées qui visent à l'apprentissage du raisonnement logique. Ces activités comportent des manipulations avec des blocs logiques et des réglettes Cuisenaire (2) et des travaux sur les relations réalisées à l'aide de graphes multicolores.

(2) *Réglettes de couleurs et de longueurs différentes permettant d'aborder l'étude de la numération avec de jeunes enfants.*

J'ai notamment pour but d'affiner et de structurer la connaissance que tous les enfants ont des premiers entiers naturels, — au moins des 10 premiers — afin que l'utilisation du « *Minicomputer* » se trouve, elle aussi, suffisamment structurée dès le départ.

Le matériel que je vous présente a un caractère nettement différent de celui des blocs logiques ou des réglettes Cuisenaire par exemple. En effet, avec ces derniers, les enfants peuvent spontanément se livrer à des jeux qui ont un sens mathématique. D'eux-mêmes, ils ne peuvent rien faire de valable avec un « *Minicomputer* » car ce matériel n'a de sens que si l'on en connaît la clé ou, si l'on préfère, l'axiomatique. Bien que celle-ci soit très simple comme on va le voir, la première tâche du maître est d'initier les enfants aux règles de la machine.

Le maître a placé au tableau une seule plaque de *Minicomputer*. Les enfants ont devant eux des réglettes Cuisenaire dont je me sers pour introduire les règles d'emploi de la machine (on pourrait trouver d'autres motivations mais mes élèves sont déjà habitués à ce matériel). Voici comment je procède. Je pose 2 pions sur la case blanche. Les enfants mettent bout à bout 2 réglettes blanches et disent : « Ce train a même longueur qu'un wagon rouge ». Sans mot dire, je retire les 2 pions, en utilisant mes deux mains, et je pose un pion sur la case rouge. Nous disons : « 2 pions sur la case blanche égalent un pion sur la case rouge » que les enfants raccourcissent en : « 2 blancs égalent un rouge », ce qui constitue la première règle.

Je pose ensuite 2 pions sur la case rouge. Les élèves, mettant bout à bout 2 réglettes rouges, découvrent que « ce train » a même longueur qu'un « wagon » violet. J'enlève les pions de la case rouge et j'en pose un sur le violet. C'est la deuxième règle : 2 rouges égalent 1 violet.

On pose 2 pions sur la case violette. Deux réglettes violettes bout à bout montrent que le train a même longueur qu'un wagon marron. Enlevons les 2 pions du violet et posons-en un sur le marron et disons, troisième règle : 2 violets égalent 1 marron. A ce stade, il faut reprendre ces trois premières règles *en sens inverse*. En effet si la symétrie de l'égalité est évidente pour nous, elle ne l'est pas nécessairement pour les enfants.

Je pose donc 1 pion sur la case marron. Les enfants prennent une réglette marron et fabriquent un train de même longueur avec deux réglettes violettes. Successivement, ils découvrent donc que :

- 1 marron égale 2 violets ;
- 1 violet égale 2 rouges ;
- 1 rouge égale 2 blancs.

Le Minicomputer est aux yeux des enfants une vraie machine à calculer. Comme un petit ordinateur il présente de manière mécanique ce qui est automatique dans le calcul.

Le Minicomputer combine d'une part le décimal de nos dix doigts adopté par tant de civilisations et codifié par PYTHAGORE, et d'autre part la langue usuelle des grands ordinateurs, le binaire, dont la découverte remonte à l'antique sagesse du fabuleux mathématicien chinois Nim.

MATERIEL DE L'ELEVE

Boîte pour deux élèves, comprenant :

1° Une brève explication du principe *Mini-computer*

2 boîtes en matière plastique, dimensions $9,5 \times 6,3 \times 2,5$ cm, contenant chacune 30 pions.

1^{re} boîte 10 pions noirs
10 pions rouges
10 pions bleus

2^e boîte 10 pions jaunes
10 pions rouges
10 pions bleus

3° 6 plaquettes, dimensions $20 \times 20 \times 0,47$ cm, en matière plastique avec les couleurs du Minicomputer (brun, violet, rouge, blanc) coulées dans la masse.

4° Une latte de 20 cm en matière plastique, couleur verte.

MATERIEL DU MAITRE

Le maître dispose de :

1° Un cadre métallique gris de 205×50 cm (replié 103×50 cm) destiné à recevoir les plaques du Minicomputer. Ce cadre peut être fixé au tableau du professeur au moyen de crochets ; sa position en hauteur est variable suivant les besoins (élèves grands et petits).

2° 4 plaques de 50×50 cm, 4 couleurs inaltérables (brun, violet, rouge, blanc) pouvant recevoir des pions aimantés.

3° Une latte de 50 cm en matière plastique, couleur verte.

4° 40 pions, \varnothing 4 cm, en matière plastique, avec aimant incorporé, couleur : noir, jaune, rouge, bleu, coulées dans la masse.

5° Un manuel d'environ 200 pages, entièrement illustré en 4 couleurs.

Bien entendu, les enfants ne mémorisent pas instantanément ces trois règles. Ils n'y parviennent qu'au bout d'un certain nombre d'expériences.

Pour être plus claire, je vais vous montrer maintenant ce que je ne fais qu'un peu plus tard avec les enfants.

Mettons un pion sur la case blanche ; c'est 1. Ajoutons un pion, voici le nombre 2. Mais on peut le représenter autrement sur la machine puisque « 2 blancs égalent 1 rouge » : 1 pion sur le rouge. Ajoutons 1 pion sur le blanc : voici 3, encore 1 pion et c'est 4. Mais 4 peut aussi se représenter par 2 pions sur le rouge ou encore, puisque « 2 rouges égalent 1 violet » par un pion sur le violet.

Ajoutons 1 pion sur le blanc et c'est 5, un autre et c'est 6. Autre représentation : les deux pions du blanc sont remplacés par un pion sur le rouge. Un pion de plus sur le blanc : 7, encore un autre : 8 qui, par une suite d'égalités se transforme en un pion sur le marron. En ajoutant un pion sur le blanc, on obtient 9 (fig. 1).

Telle est donc la représentation des nombres de 1 à 9 avec *Minicomputer*.

Voyons par exemple comment les enfants parviennent à représenter 7 sur la machine à l'aide des trois premières règles. La première vision du nombre 7 est pour eux une collection de 7 objets : 7 clous, 7 petites bouteilles, 7 petits objets disparates et, en particulier 7 pions sur la case blanche. A partir de là, on recherche une représentation plus commode et plus simple.

On joue donc avec les règles du type $1+1=2$. En effet, les égalités naïvement exprimées au début sous la forme « 2 blancs égalent 1 rouge », sont rapidement devenues : $1+1=2$; $2+2=4$, $4+4=8$...

Et nous parvenons à la représentation binaire qui figure sur le tableau de la figure 1.

Notons d'ailleurs que, dans le cas de 7, on peut aisément modifier « l'éclairage » du nombre, avec des pions de couleurs différentes par exemple, et « lire » les décompositions additives les plus simples : $4+3$, $5+2$, $4+2+1$...

Ceci est également possible avec d'autres nombres mais, dans ce cas, il faut intervenir sur la machine et modifier son état. La représentation de 8 ne nous apprend rien sur le nombre mais en appliquant les règles « à l'envers », comme disent les enfants, on peut faire apparaître $4+4$, $6+2$, $5+3$...

Voilà donc une idée de ce qu'il est possible de faire avec *Minicomputer* et trois règles d'utilisation seulement. Mais, réduite à une seule plaque, la machine reste assez pauvre. Allons plus loin et accédons aux nombres plus grands.

En partant de 9 et en ajoutant un pion sur la case blanche, on obtient 10 qui peut également se représenter comme sur la figure 2.

Notons que les enfants ne sont pas étonnés de cette représentation. Habités aux réglettes Cuisenaire, ils savent que la réglette orange a même longueur qu'un train marron-rouge.

Mais le nombre 10 peut encore être représenté autrement. On enlève ces deux pions, on ajoute une autre plaque à la gauche de la première et on pose un pion sur sa case blanche (fig. 3).

Cette quatrième règle n'a présenté aucune difficulté pour les enfants. Ils ont simplement dit : « Hop ! sur la deuxième plaque ». Tout le problème du passage à la dizaine s'est limité à cette adjonction de la seconde plaque.

Ainsi, la situation est extrêmement claire pour l'écriture décimale des nombres. Les plaques étant accrochées le long d'un tableau, on peut écrire en dessous. Nous écrivons 1 sous la seconde plaque et 0 sous la première et nous aurons obtenu l'écriture usuelle du nombre 10 (fig. 4).

Une fois le 10 obtenu, on peut continuer les expériences dont je vous ferai grâce en ajoutant des pions sur la première plaque pour obtenir successivement les nombres de 11 à 19 (fig. 5).

Les enfants vont pouvoir continuer à jouer ainsi avec les nombres plus petits que 100 ; en utilisant ces deux seuls blocs, ils vont se familiariser avec la représentation décimale des nombres. Ils pourront, par exemple, mettre 25 en machine (fig. 6).

Certains se demanderont si ce formalisme ne peut pas conduire les enfants à perdre le contact avec la notion de naturel en tant que cardinal d'un ensemble.

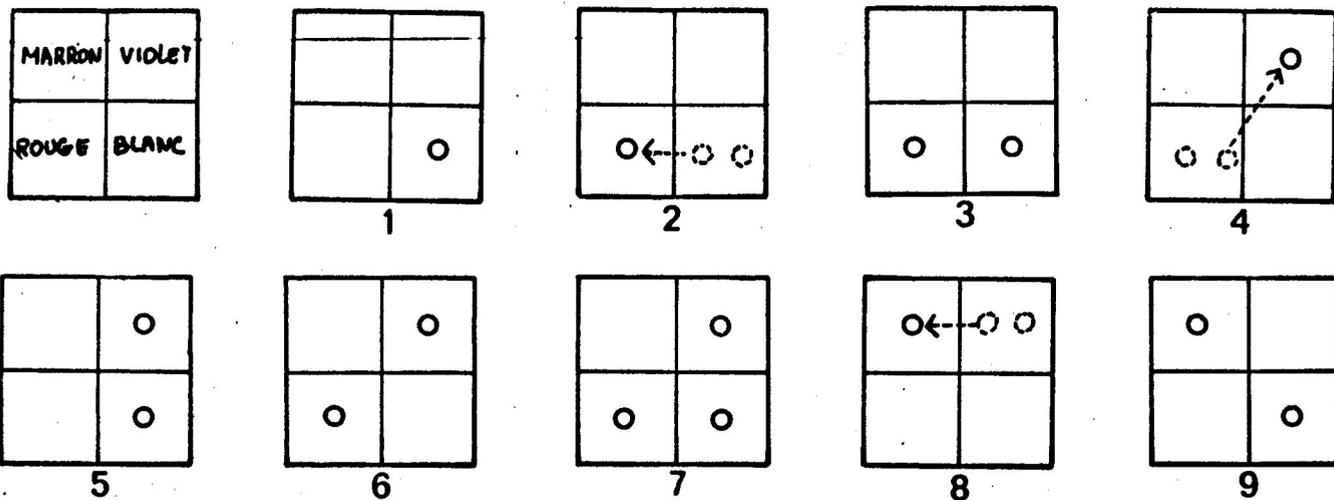


figure 1

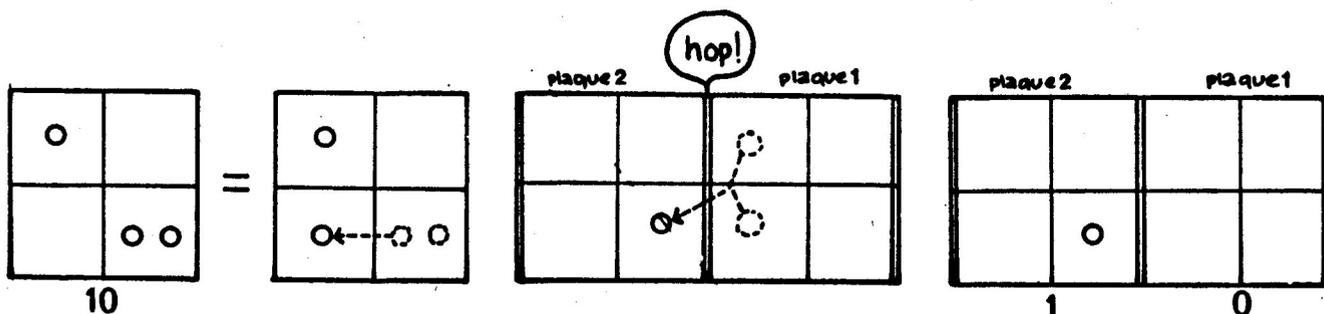
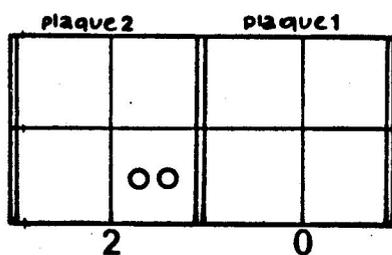


figure 2

figure 3

figure 4



ce qui donne après application de la première règle :

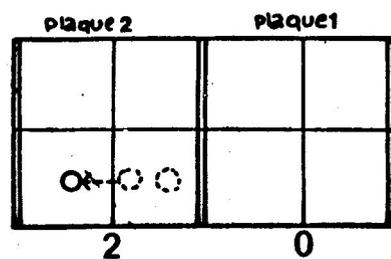


figure 5

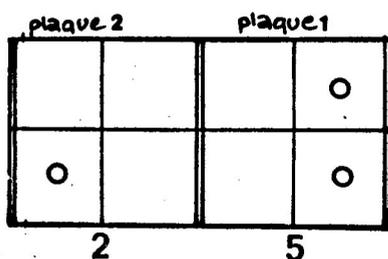


figure 6

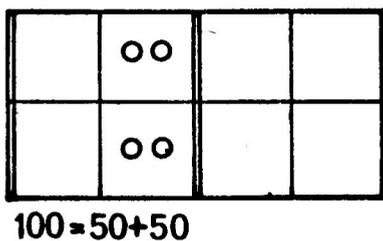


figure 7

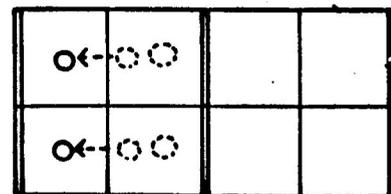


figure 8

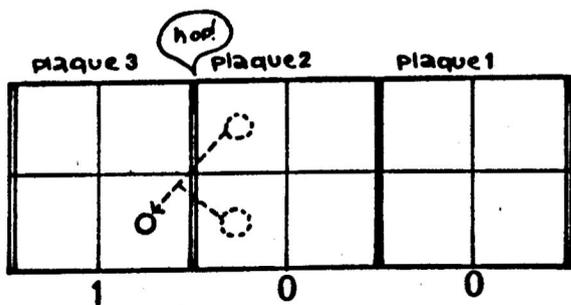


figure 9

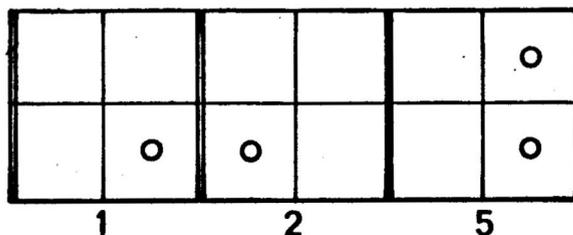


figure 10

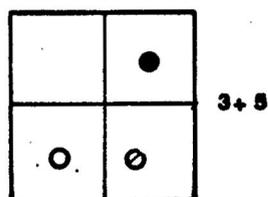


figure 11

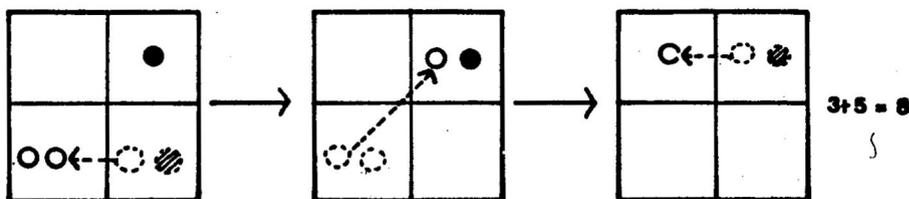


figure 12

Lorsqu'ils voient 25 sur *Minicomputer* pensent-ils encore à un ensemble de 25 objets ?

Pour éliminer ce défaut possible, un certain nombre d'expériences et de transformations sont nécessaires. En jouant « à l'envers », on fera apparaître de très nombreux termes égaux à 25 et, finalement, on parviendra, dans la case blanche de la première plaque, à un ensemble de 25 pions ou de 25 cailloux...

Au bout de trois semaines d'utilisation de *Minicomputer* en classe, un enfant a découvert la représentation du nombre 100. En fait, depuis deux ans que je poursuis cette expérience, j'ai remarqué que le nombre 100 est présent en classe dès le deuxième mois. Les enfants en parlent un peu comme de l'infini.

Sur son *Minicomputer* individuel, un élève a posé un pion sur chacune des cases des deux premières plaques et il a posé la question : « Ai-je représenté le nombre 100 ? » Je n'ai pas répondu à sa question, en espérant qu'il la reformulerait plus tard, peut-être sous une autre forme, parce qu'il me semblait prématuré d'aborder à ce moment le problème du nombre 100.

La question a donc cheminé dans la tête de l'enfant. Deux jours après, il est revenu à la charge et m'a dit : « Je veux fabriquer le nombre 100 sur la machine ». « Débrouille-toi », lui ai-je répliqué. Il s'est très bien débrouillé. Seul à sa table, il a marqué $50 + 50$, ce qu'il a pu faire car il connaissait déjà la représentation de 50 et savait que deux billets de 50 francs valent un billet de 100 francs. C'était donc sa propre définition du nombre 100 (fig. 7).

Mais il a continué à jouer en obtenant, d'une part, $10 + 10 = 20$ et $40 + 40 = 80$ (fig. 8).

et il m'a dit : « Maintenant, je vais faire un hop ». Il a enlevé les pions et en a posé un là où aurait dû se trouver la case blanche suivante. Comme il n'y en avait pas, il m'a demandé une troisième plaque et a marqué le nombre 100 (fig. 9).

Il était extrêmement content de sa découverte qui a été communiquée à toute la classe, ce qui a permis de continuer l'expérience en marquant 105, 110 puis 125.

L'écriture de ces nombres n'a soulevé aucune difficulté. On a écrit par exemple : figure 10.

C'est donc ainsi que les enfants ont accédé à la représentation binaire décimale des nombres. En effet, on remarque que si, d'une plaque à l'autre, le système est décimal, il est binaire à l'intérieur de chaque plaque.

L'astuce de *Minicomputer* consiste à avoir placé le 8 et le 2 là où il faut pour préparer les « hop ».

Je ne prétendrai pas qu'en trois semaines les enfants maîtrisent la représentation des nombres jusqu'à 100 et au-delà. Suivant leur degré de maturité, ils vont plus ou moins vite. Je puis affirmer cependant, par expérience, qu'à la fin du premier mois les éléments les plus avancés de la classe dominent complètement la structure de la machine, tandis que la moyenne des enfants y parvient au bout du deuxième mois et que les plus jeunes ont besoin d'encore un peu plus de temps et d'un certain nombre d'exercices individuels.

Mais comment la machine calcule-t-elle ? Comment, par exemple, permet-elle d'additionner ?

Démarrons avec de petits nombres. Il y a dans un parking 3 *Volkswagen* représentées par des pions rouges et 5 *Simca* représentées par des pions blancs.

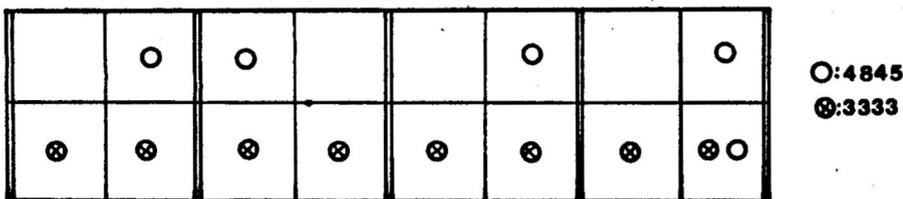
Combien y a-t-il d'automobiles en tout ? Sans entrer dans tous les détails, voici comment les choses se passent.

Les 3 *Volkswagen* et les 5 *Simca* étant inscrites (abstraction faite des couleurs), nous obtenons la *figure 11*.

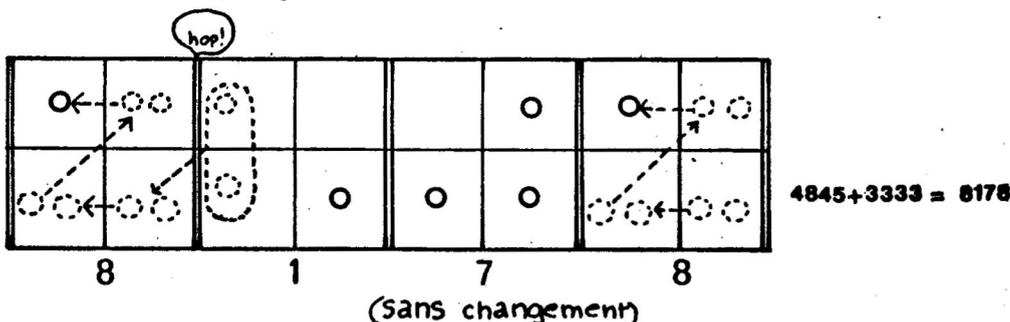
Avec les règles classiques du jeu, on transforme successivement la situation (*fig. 12*).

Faisons la même chose avec des nombres à quatre chiffres, par exemple 4845 et 3333.

Inscrivons-les tous deux sur la machine (*fig. 13*).



On a successivement : *figure 14*.

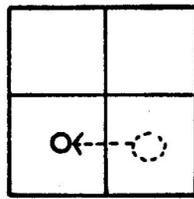


La machine résoud donc aisément le problème de l'addition. C'est d'ailleurs l'organisation binaire à l'intérieur de chaque plaque qui rend les manipulations particulièrement simples.

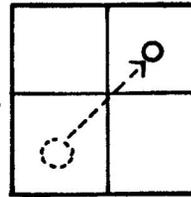
En fait, les enfants acquièrent très vite une image mentale d'un nombre représenté sur *Minicomputer*. Ainsi, lorsqu'on demande à un élève de former le nombre 7845, il se dirige vers le tas de jetons et après une brève réflexion, n'en prend que ce qui lui sera nécessaire pour écrire le nombre.

S'agissant de multiplication, la manipulation des entiers naturels est réduite à sa plus simple expression. En raison de l'organisation binaire des plaques, pour savoir multiplier, il suffira de savoir additionner et de savoir doubler.

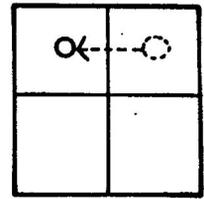
Doubler est une des activités les plus spontanées chez l'enfant. Doubler 1, 2, 4, c'est, respectivement, faire ceci : *figure 15*.



$$1 \times 2 = 2$$



$$2 \times 2 = 4$$



$$4 \times 2 = 8$$

Par contre, en doublant 8 on se heurte à une difficulté qui n'existerait pas si nous étions dans une civilisation binaire et non décimale. En effet, nous n'aurions pas, d'une plaque à l'autre, 1 marron + 1 rouge = 1 blanc mais 2 marrons = 1 blanc.

Cependant, nous sommes encore obligés de tenir compte du contexte décimal dans lequel nous vivons.

Avec $8 + 8$ certains enfants impulsifs ont envie de continuer le jeu et de faire un « hop » sur la case blanche de la seconde plaque. Mais le résultat est faux, on est dans une impasse. Que fait-on naturellement quand on est dans un cul de sac ? On recule. C'est ce que nous faisons en appliquant les règles à « l'envers » (*fig. 16*).

8 c'est $4 + 4$

4 c'est $2 + 2$

Le « hop » est possible

On a bien obtenu $8 \times 2 = 16$

Le calcul du double de 8 est la seule difficulté initiale que présente la multiplication dans le système *Minicomputer*. Cependant, cette marche arrière est rapidement dominée par les enfants.

Alors que l'apprentissage des tables de multiplication fait depuis longtemps perdre un temps précieux aux enfants, notre machine permet de construire rapidement les produits de ces tables, y compris ceux qui sont habituellement les plus difficiles pour les enfants.

Calculons par exemple le produit $8 \times 7 = 7 \times 8$.

Je peux donc marquer 7 et multiplier par 8 ou marquer 8 et multiplier par 7.

Dans le premier cas, les enfants familiarisés avec la composition des fonctions doubles, grâce aux graphes, savent que multiplier par 8 c'est doubler trois fois de suite.

En doublant 7 une fois, on obtient : *figure 17*.

En doublant 14, puis 28, on obtient de la même façon 56.

Dans le second cas, on multiplie 8 par 7. Les enfants savent que 7 c'est $1 + 2 + 4$ puisque c'est ainsi que le nombre s'écrit sur *Minicomputer*. Il suffit donc de calculer 1 fois 8, 2 fois 8 et 4 fois 8 et d'additionner les produits.

On voit qu'on est toujours ramené à doubler et additionner.

Dans l'enseignement traditionnel, la soustraction est une opération difficile pour les jeunes enfants et, de plus, elle n'est pas une loi interne dans l'ensemble des naturels.

J'ai pensé que le plus simple — et l'expérience m'a confirmée dans cette idée — était d'étendre immédiatement l'ensemble des naturels à l'ensemble des entiers positifs et négatifs. Nous faisons les négatifs dès le cinquième ou sixième mois de l'année. Je n'entrerai pas dans le détail de cette présentation.

Au début, nous imaginons des schémas simples. Par exemple, deux enfants, Jean et Philippe jouent aux dominos. Lorsque Philippe gagne, il marque un point rouge sur une feuille ; lorsque c'est Jean, il inscrit un point bleu. Supposons que Philippe ait obtenu 8 victoires et Jean 5. Quel est le score final ? Les enfants éliminent les matches nuls en les réunissant par une barre : *figure 18*.

Il reste donc trois victoires de Philippe. Cette situation est schématisée par le calcul : 8 en rouge + 5 en bleu = 3 en rouge.

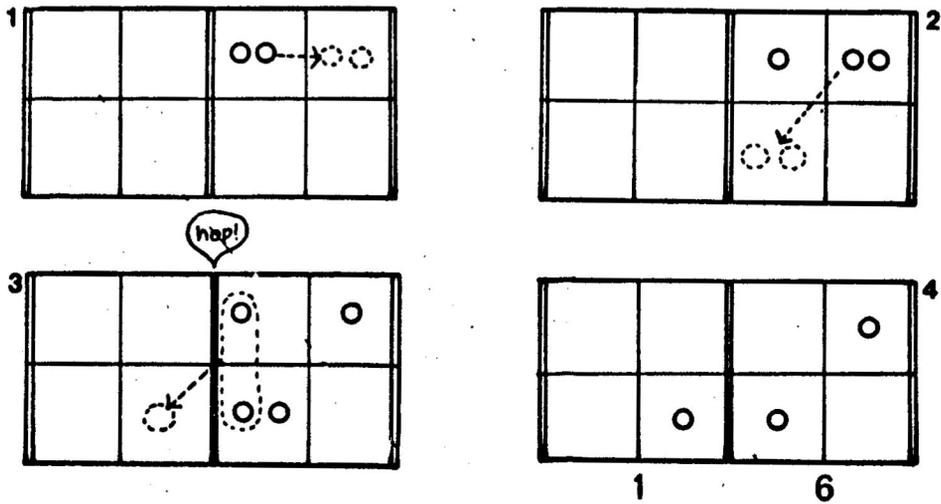


figure 16

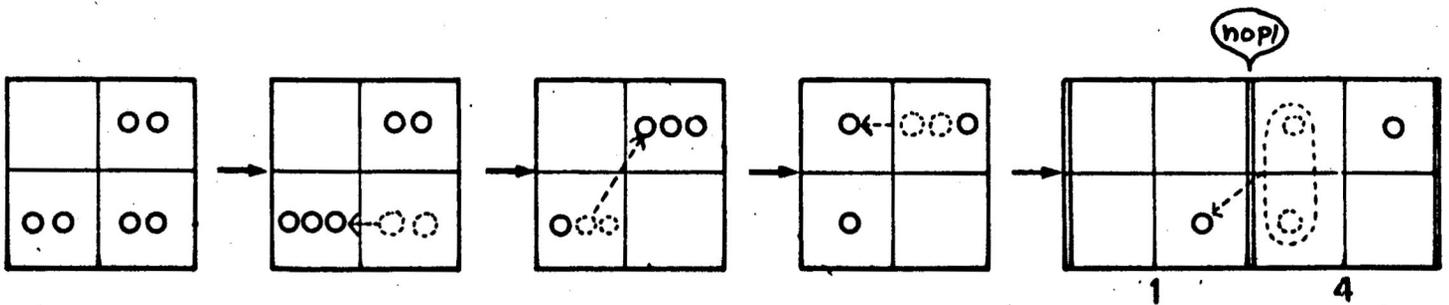


figure 17

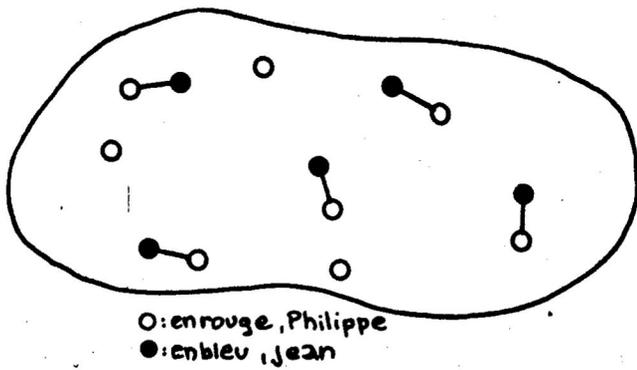


figure 18

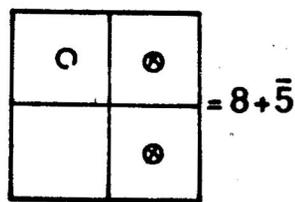


figure 19

On passera très facilement de l'addition des entiers positifs et négatifs respectivement écrits en rouge et en bleu à l'addition usuelle de nombres de signes opposés.

Transposons maintenant sur *Minicomputer* cette addition de nombres de signes opposés. L'opération posée ne fait pas apparaître le résultat car elle ne met pas en évidence les « matches nuls » (fig. 19).

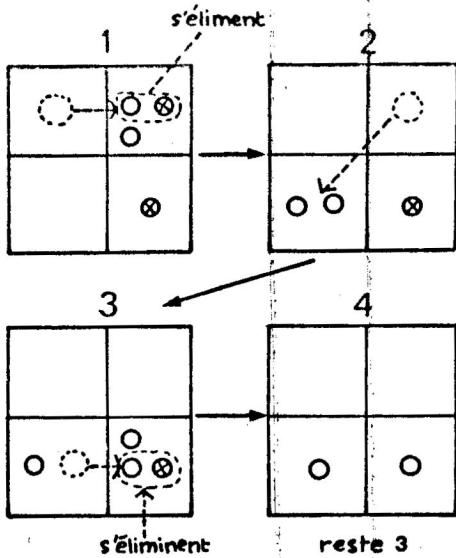


figure 20

Il faut modifier quelque chose. La seule manière fructueuse est de jouer avec le pion 8 (fig. 20).

Effectuons un calcul plus intéressant, par exemple $3\ 552 + 2\ 283$ (fig. 21).

Pour les enfants, cette opération apparaît comme une bataille entre les soldats rouges (3 552) et les soldats bleus (2 283). On voit tout de suite que l'armée des rouges occupe la position stratégique la plus avancée sur *Minicomputer*. C'est important pour déterminer l'attaquant.

La règle de la bataille est simple : deux soldats de couleurs différentes situés dans la même case s'éliminent immédiatement. On a donc, d'emblée, par élimination des pions antagonistes : figure 22.

Le groupe des entiers positifs et négatifs est donc introduit en classe dès l'âge de six ans.

Quant aux nombres décimaux, les enfants ont découvert eux-mêmes le principe de la virgule. Voici comment.

Nous savions déjà partager 100 en deux : figure 23.

J'ai alors posé aux élèves la question suivante : « Je veux partager 1 franc entre deux enfants. Combien chacun recevra-t-il ? » Ils m'ont répondu : « 50 centimes », car ils ont déjà une certaine pratique de la monnaie.

Je leur ai demandé ensuite comment on pouvait calculer la moitié de 1 sur la machine. Il y a eu quelques minutes d'un silence de concentration et de réflexion, puis un enfant s'est levé : « Moi, je sais. Je veux jouer ici » et il désignait l'endroit situé immédiatement à droite de la première plaque. « Donnez-moi une nouvelle plaque » me dit-il.

Nous avons ajouté la plaque qu'il demandait mais, pour ne pas oublier que nous étions derrière la case blanche du nombre 1 nous avons introduit une séparation sous la forme d'une règle verte que nous appellerons « barrière » (fig. 24).

« Maintenant, je peux jouer » a dit l'enfant et il a procédé comme pour 100 (fig. 25).

Mais comment écrire le résultat ? Rien n'a paru plus simple aux enfants : nous avons écrit le nombre 5 et, devant, un 0 et, entre les deux, nous avons signalé l'existence de la barrière verte : 0/ barrière verte /5. La plaque située à droite de la barrière verte a été baptisée par les enfants « plaque des minuscules ».

Il a suffi ensuite de leur dire que, pour plus de commodité, on avait pris l'habitude de remplacer le mot « barrière verte » par une virgule (ou, dans les pays anglo-saxons, par un point) : 0,5. Bien sûr, les enfants ont voulu ensuite calculer la moitié de 0,5. Ils ont ajouté une deuxième plaque à droite et l'ont appelée « plaque des mini-minuscules ». Ensuite ils ont effectué les manipulations adéquates.

Dernière question que je voudrais évoquer : l'introduction des décimaux illimités. Je pose aux enfants le problème suivant : « J'ai 100 F que je veux partager équitablement entre trois enfants. Combien vais-je donner à chacun d'eux ? ». Ils ont procédé par approximations successives. Ils ont d'abord dit 30 F. Nous avons vérifié. « Trois fois 30, c'est trop peu ». Un autre a suggéré 40 F : « C'est trop ».

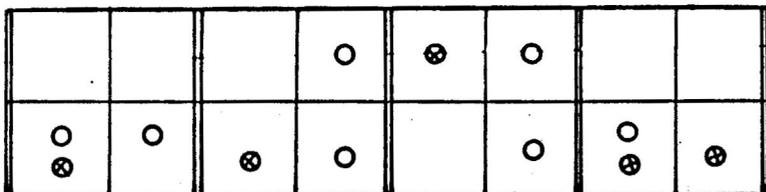
Un troisième a proposé : « Donnons 30 F à deux enfants et 40 F au dernier ». Mais ce n'était pas équitable. On a demandé alors l'aide de la machine et on a marqué 100 sur *Minicomputer*.

Quelle stratégie adopter ? Les enfants ont dit : « Ce n'est pas difficile. On va jouer à l'envers en essayant d'amener trois pions sur chaque case occupée ».

Et voici, en raccourci, ce à quoi les opérations ont abouti : figure 26.

A ce moment, les élèves ont dit : « Chaque enfant va recevoir 33 F mais il restera 1 F. Que va-t-on en faire ? ».

On a proposé de donner 50 centimes à deux enfants. Mais le troisième ne recevrait rien... Il a fallu demander la réponse à la machine.



○ = 3552 (positif)
 ⊗ = 2283 (négatif)

figure 21

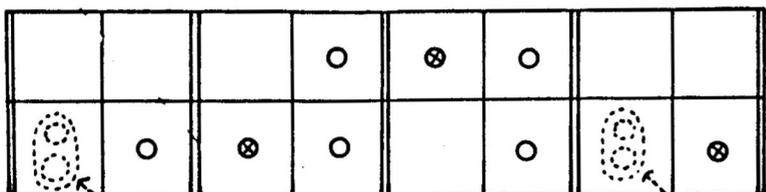
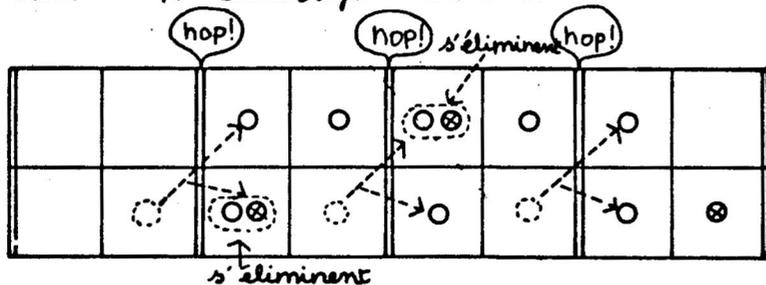


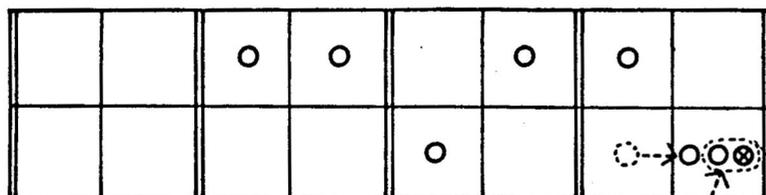
figure 22

s'éliminent s'éliminent

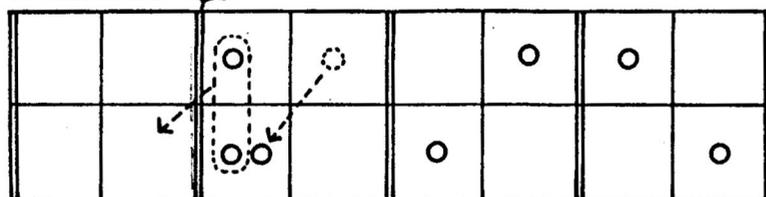
trois "hop!" successifs à l'envers:



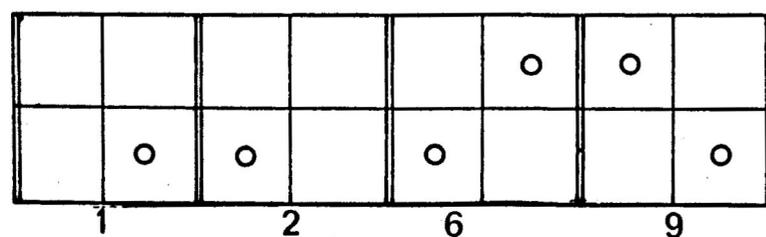
suivis d'une ultime attaque:



une dernière manipulation est nécessaire pour lire le résultat hop



qui est:



$$3552 + 2283 = 1269$$

